2009 卷（第 1 辑）
No. 1 2009

Chinese Research on Elementary Mathematics

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

- 周春荔　数海拾贝译文三则
- 杨　之　平方筛选数阵
- 沈文选　初等数学研究在数学教育研究中的地位
- 杨学枝　两个三元不等式及其应用
- 吴　康 苏文龙 罗海鹏 许晓东　限定条件的有序集组计数（II）
- 孙文彩　几个代数不等式猜想
- 曾建国　四面体的等距共轭点性质初探
- 张小明 褚玉明　最值单调定理及其应用
- 杨志明　周界中点三角形的一个基本不等式的上界
- 李　明 富明远　Pythagoras 完全比例的推广研究
- 张玉明 褚小光　一个三元二次型不等式及若干推论
- 江嘉秋　向量在椭圆共轭直径问题中的应用
- 萧振纲　与两圆根轴有关的两个几何定理
- 熊曾润　四面体的欧拉球面及其性质

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2009卷(第1辑)
Chinese Research on Elementary Mathematics
No. 1 2009

中国初等数学研究

Chinese Research on Elementary Mathematics

主编 杨学枝

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

中国初等数学研究/杨学枝主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.3
ISBN 978-7-5603-2006-9

Ⅰ.初… Ⅱ.杨… Ⅲ.初等数学-文集 Ⅳ.012-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 033095 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张 瑞
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 880mm×1230mm 1/16 印张 8 字数 259 千字
版 次 2009 年 4 月第 1 版 2009 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2006-9
印 数 1-3 000 册
定 价 20.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

中国初等数学研究

陳省身

1995年5月20日

已故国际著名数学大师陈省身先生生前为本文集所题写的书名

《中国初等数学研究》编辑委员会

顾　问:周春荔　杨世明
主　任:沈文选
副主任:杨学枝　吴　康　刘培杰
主　编:杨学枝
副主编:刘培杰　吴　康
编辑部主任:刘培杰(兼)
编辑部副主任:江嘉秋
编委(按姓氏笔画为序):
王中峰　王光明　田彦武　叶中豪　江嘉秋
孙文彩　刘培杰　沈文选　吴　康　汪江松
杨学枝　杨志明　张小明　曾一鸣　黄邦德
曾建国　萧振纲

献词

初等数学研究，在中国既有光辉的历史记录，又有庞大的现代学者队伍，所以，此中国初等数学研究专业系列文集终于出版了，这是很值得庆幸的事！

众所周知，公元1000年至14世纪初，曾是中国数学史上的"宋元全盛时代"。那时中国的数学曾领先于世界。例如，秦九韶的"大衍求一术"（不定方程的中国独特解法）及高次代数方程数值解法，郭守敬创立的三次内插法，还有朱世杰由"天元术"发展成的"四元术"（相当于代数学或方程论）等成就，都是中世纪欧洲学术界所望尘莫及的。

20世纪40年代以后，世界数学史进入现代时期，从那时起，经历了长期衰落的中国的数学开始融入世界潮流。特别近30年来，中国数学界（包括数学教育界）已出现了一系列可喜景象：除了已培育成长出众多能在国际数学界崭露头角的数学工作者之外，还有数以万计的中学与高校数学教师，从事着数学教育与数学创作活动，他们的论著及作品，每年都在海内外各种文集上传播问世。

特别值得提到的是，近现代的中国初等数学研究工作者，已做出了许多令人喜悦的成果。这些成果分属于"不等式研究"、"不定方程研究"、"初等数论问题研究"、"组合计数问题研究"、"图像曲线特性研究"以及联系数学奥林匹克"竞赛题研究"等方面。根据知情者的综合报导，可以如实地评论说："中国当代学者在初等数学领域的工作成就，是居于世界前列的"。国际数学教育界都已看到，中国青年学子在国际数学奥林匹克竞赛中获得的金银牌是最多的。其实这与如上所说的评论事实是有内在联系的。很难想像，如果没有一流的初等数学研究工作者队伍做后盾，那么怎能产生一流的数学奥林匹克参赛队伍呢？

初等数学研究直接关联到基础数学教材建设及数学方法论等方面的问题研究，所以它又是推进数学教改的巨大动力之一。中国现已逐步成为"数学大国"并以发展成"数学强国"为目标，因此现今创办全国性初等数学专业系列文集，既已具备了充分条件，同时也反映了时代发展的客观要求，所以国际数学大师陈省身先生生前特为本文集题写了"中国初等数学研究"，以示支持与鼓励。

这里让我们来谈谈关于办好一种初等数学研究文集的希望和要求。首先，为了保证和不断提高文集的质量与水平，必须依靠编者与作者的相互支持与合作。同时还期望能有稿件审阅者与读者的支持和合作。

希望文集的编者与作者都能意识到本文集还肩负着培育人才的功能与职责。所以对待能促进数学教改的学术作品，理应特别青睐。例如，有关专题研究的一些综述介绍与评论等，对指导年青人走上科研之路就会有较多启示和帮助。

由于数学科学是一个有机统一体，许多分支学科都有共同的客观本原，这就决定了“初等数学”与“高等数学”必然是互通的．例如，高等数学中的许多基本概念与思想方法，都可以在初等数学中找到它们的具体背景和原型．另一方面，又可以看到初等数学中的一些命题、公式和定理如何在高等数学中取得了应用上更为宽广的抽象形式．诸如此类，都说明了初、高等数学在内容与方法上的统一性．因此，我们很希望将来在本书上还会不断出现“用高等观点看初等数学”以及“用初等观点看高等数学”的有关作品．事实上，德国著名数学家克莱因（F. Klein）的名著已给人们提供了宝贵启示．

据所知，已故的杰出数学家华罗庚与匈牙利著名数学家埃尔特希（P. Erdös）等都特别重视用初等方法求解高等数学问题，以及用初等方法证明高等数学定理．事实上，数学中的初等方法和初等证明最能揭示问题与定理的本质，还能显示“数学美”的特征，故最能激发和满足人们的好奇心和审美情趣．正是这个原因，20世纪40年代中期美国数学学会曾将数学大奖（菲尔兹奖）颁发给了塞尔贝格（A. Selberg）和埃尔特希，以奖赏他们各自独立地用初等方法证明了素数理论中的核心定理——“素数分布定理”．

自然，我们也很希望将来会有一些关于高等数学定理的初等证法的精美作品出现在初等数学研究专业文集上．显然，这类作品也将是对高等数学教材建设的一种贡献．最后，让我们祝愿这本全国性专业系列文集的成长与发展对中国数学事业的革新进程起到一份促进作用．

徐利治
2009年3月于广州

徐利治简介：

徐利治，1920年生，原名徐泉涌．教授．江苏常熟人．1945年毕业于西南联合大学数学系．次年加入中国共产党．1949年、1950年先后在英国亚贝丁大学、剑桥大学学习．1951年回国．历任清华大学副教授，吉林大学教授、教务长，大连工学院教授、应用数学研究所所长．在渐近分析、逼近论方面取得重要成果，在国际上被誉为“徐氏渐近公式”、“徐氏逼近”，1985年获国家教委科技进步奖二等奖．著有《渐近积分和积分逼近》、《高维的数值积分》、《数学方法论选讲》，合著《函数逼近的理论与方法》．

祝《中国初等数学研究》诞生

《中国初等数学研究》诞生了，值得庆贺！

初等数学有大量的问题，需要研究.

中国研究初等数学的人很多，成千上万！

中国研究初等数学的成绩斐然，在平面几何、不等式、组合、初等数论等方面都有很好的成果. 大量初等数学的书籍、文章就是有力的证明.

有人以为研究只能属于高等的数学，只能是前沿的、深邃的问题. 其实研究本身并无高等、初等的分别. 得到高深的结论是新发现，解决初等的问题同样是新发现，都是人类向未知领域的迈进. 而且很多人们耳熟能详的大问题，如费马大定理，如哥德巴赫问题，论起它们的"出身"，无不属于初等数学.

初等数学研究好比"下里巴人"，"和者众"，吸引了大量的数学爱好者，为数学研究输送、储备了人才.

数学研究不仅需要"阳春白雪"，同样也需要"下里巴人". 如果只有少数"精英"研究数学；如果研究者过于专门，"know more and more about less and less"；那么数学也就不能获得大众的认同，数学本身也就难以发展.

初等数学研究并不容易，它也有深刻的内涵与精巧的方法. 陆家羲先生的大集定理就是一个经典的例子. 再如在国际双微会议上曾经讨论过如下的几何不等式：

> 在$\triangle ABC$的边上取三个点D,E,F，使得沿着三角形的边界从D到E，从E到F，从F到D，所走的长都相等（即都等于$\triangle ABC$的周长$a+b+c$的三分之一）. 求证：
>
> $$\triangle DEF\text{ 的周长}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$$

这道题难倒了众多与会的数学家，在会议期间没有能够解决. 后来福建的杨学枝先生（也就是本刊的主编）给出了一个简洁优雅的证明.

对于初等数学，我是很有兴趣的，也颇想做些研究，但却没有多少成绩. 我做得最多的是数学的普及与传播，或许这也可以说是初等数学研究的一个部分.

普及与提高，二者不可缺一. 普及可以使更多的人了解数学，喜爱数学，甚至参与研究数学. 但没有提高，就只能停滞在低水平上，没有长进. 反过来，一味强调提高，轻视普及，参与的人将越来越少. 大量"凡夫俗子"被摒弃在数学研究大门之外，虽然他们非常喜爱数学. 如果出现这样的情况，提高也就难以为继了.

其实，普及中也有提高.一些理论的更好的阐述，某个问题的更通俗的解释，不少解法的简化或推广，往往更接近事物的本质，未尝不是一种提高.

从事数学的普及与传播，不仅于人有益，对自己也大有好处.从事这种工作，可以培养学习与研究数学的兴趣；可以进行研究的尝试，小试身手.在条件可能的情况下，可以进一步走上研究的道路.甚至进入更高深的研究.当年华罗庚先生就是这样步步登高的.

初等数学十分有趣，但年轻人切不可沉溺于初等问题.年轻人应当志存高远，应当尽快占领尽可能高的数学高地.如果一开始就陷入一两个初等问题中不能自拔，那么就会与真正的数学研究渐行渐远了.初等数学研究可能更适合数学教师，有固定职业的业余数学家或年岁较大的人.

最后，祝中国初等数学研究取得更多的成就.

单墫简介：

单墫(Shan Zun)，教授，男，1943年11月生，江苏泰州市人，中共党员，1964年扬州师范学院数学系毕业，1983年在中国科学技术大学获理学博士学位.现任南京师范大学数学与计算机科学学院教授，博士生导师，南京市第十届政协委员，南京数学学会理事长.曾任南京市第九届政协委员，南京师范大学数学系主任，中共十四大代表，国家教委理科实验班专家组组长，中国国家数学奥林匹克代表队总教练、领队.他长期从事数论及数学课程与教学论研究，发表各种论文100余篇，出版专著20余部.1991年被评为全国优秀教师并享受国务院特殊津贴，1992年被授予国家级有突出贡献的中青年专家称号.1997年被评为南京师范大学优秀学科带头人.

目　录

• 专题研究

限定条件的有序集组计数(Ⅱ) ………… 吴　康　苏文龙　罗海鹏　许晓东　(1)
两个三元不等式及其应用 ………… 杨学枝　(7)
最值单调定理及其应用 ………… 张小明　褚玉明　(17)
Pythagoras 完全比例的推广研究 ………… 李　明　富明远　(23)
一个优美的自然数阵 ………… 杨　之　王雪芹　(26)
一类优美的自然数方幂和不等式 ………… 杨志明　(28)
平方筛选数阵 ………… 杨　之　(32)
四面体的等距共轭点性质初探 ………… 曾建国　(35)
四面体的欧拉球面及其性质 ………… 熊曾润　(40)
与两圆根轴有关的两个几何定理 ………… 萧振纲　(44)
完全四边形的性质再探 ………… 沈文选　刘　洁　谢　伟　(47)
三角形旁心的一个性质 ………… 曾建国　(50)
三角形心的位似变换 ………… 陈丽英　(53)
欧拉定理的推广 ………… 林世保　(55)
三角形的"等差点"初探 ………… 黄华松　黄光文　王志勇　(57)
三角形外角平分线的一组性质 ………… 周相英　(62)
周界中点三角形的一个基本不等式的上界 ………… 杨志明　(64)
三角形内心三角形的一个不等式 ………… 邹守文　周友明　(66)

• 数学教育与教学

初等数学研究在数学教育研究中的地位 ………… 沈文选　(68)
中专数学中的高数知识教学方案初探 ………… 孙佳镇　王梓华　(72)

• 竞赛数学

一道不等式竞赛题的简证与探讨 ………… 黄道军　(76)

• 测试数学

向量在椭圆共轭直径问题中的应用 ………… 江嘉秋　(78)

• 研究动态与综述

初等数学问题与课题 ………… 杨　之　(81)
关于角平分线长平方和不等式的研究综述 ………… 孙文彩　(86)
100 个优美的三角形几何不等式新问题 ………… 刘保乾　(92)

• 国外初数研究

数海拾贝译文三则 …… 周春荔 (96)

• 短论集锦

一道经典面试题的解析与推广 …… 彭 刚 王云亮 (103)
两个猜想不等式的证明 …… 张玉明 褚小光 (105)
一个三元二次型不等式及若干推论 …… 张玉明 褚小光 (107)
周界中点三角形两个面积不等式的推广 …… 沈 毅 (109)

• 学生习作

凸函数的一些性质 …… 邓博文 (110)

• 问题与解答

几个代数不等式猜想 …… 孙文彩 (113)
一个不等式问题的解答 …… 李 超 林 博 (115)

限定条件的有序集组计数(Ⅱ)

吴　康[1]　苏文龙[2]　罗海鹏[3]　许晓东[3]

(1. 华南师范大学数学科学学院,广东　广州　510631;
2. 梧州学院,广西　梧州　543002;
3. 广西科学院,广西　南宁　530031)

摘　要:推导了条件 $A_1 \cup \cdots \cup A_m = N_n$ 以及再加上条件 $A_1,\cdots,A_m \neq \varnothing$ 之下,集函数 $x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}$, $x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}$, $x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|}$, $x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}$, $x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)}$ 和 $x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}$ 的相关计数式,并作出一系列推广及应用.

关键词:有序集组　有序覆盖　集函数　有序集组计数

1. 符号系统和已有结果

本文接续文[1],对限定条件的有序集组计数进行深人探究,仍应用一一对应计数原理、加法原理、乘法原理、容斥原理、递推方法以及生成函数方法. 限于篇幅,一些公式只给出简证或不证明.

为免阅读困难,现把文[1]使用的特定符号系统简要重录:对有限集 A, $|A|$ 表示 A 的元素个数;若 $A \subset \mathbf{C}$(复数集),$\tau(A)$ 表示 A 的元素和,约定 $\tau(\varnothing)=0$. 对 $a,b \in \mathbf{Z}$(整数集),$a \leqslant b$, $N_{a,b}$ 表示集合 $\{a,a+1,\cdots,b\}$;对 $n \in \mathbf{Z}^+$(正整数集),N_n 表示集合 $N_{1,n}$. 为方便,文[1]用到的 7 种集函数再命名如下:对(有序)m 集组 $(A_1,\cdots,A_m)$,定义集函数

① 长度:$f_1(A_1,\cdots,A_m) = m$.

② 宽度:$f_2(A_1,\cdots,A_m) = |A_1|+\cdots+|A_m|$.

③ 广度:$f_3(A_1,\cdots,A_m) = |A_1|\cdots|A_m|$.

④ 丰度:$f_4(A_1,\cdots,A_m) = |A_1\cup\cdots\cup A_m|$.

⑤ 浓度:$f_5(A_1,\cdots,A_m) = |A_1\cap\cdots\cap A_m|$.

⑥ 密度:$f_6(A_1,\cdots,A_m) = \tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)$.

⑦ 跨度:$f_7(A_1,\cdots,A_m) = \tau(A_1)\cdots\tau(A_m)$.

本文沿用[1]之限定条件:对 $n \in \mathbf{Z}^+$, $k \in \mathbf{Z}_0$(非负整数集),$k \leqslant n$,设定条件

$$A_1,\cdots,A_m \subset N_n; \tag{1}$$

$$A_1\cup\cdots\cup A_m = N_n; \tag{2}$$

$$A_1,\cdots,A_m \neq \varnothing. \tag{3}$$

在限定条件(1)的基础上,本文研究以下集函数产生的计数问题,其中 $x_1,\cdots,x_m,x \in \mathbf{C}$,且

$$g_1(A_1,\cdots,A_m) = x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}, \tag{4}$$

$$g_2(A_1,\cdots,A_m) = x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}, \tag{5}$$

$$g_3(A_1,\cdots,A_m) = x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|}, \tag{6}$$

$$g_4(A_1,\cdots,A_m) = x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}, \tag{7}$$

$$g_5(A_1,\cdots,A_m) = x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)}, \tag{8}$$

$$g_6(A_1,\cdots,A_m) = x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}. \tag{9}$$

为简明,和式 $\sum\limits_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n} f_2(A_1,\cdots,A_m)g_1(A_1,\cdots,A_m) = \sum\limits_{A_1,\cdots,A_m\subset N_n}(|A_1|+\cdots+|A_m|)x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}$ 简记为 $\sum\limits_{(1)} f_2 g_1$ 等,依此类推.

文[1]已证明的主要结果为

$$\alpha_1(m,n) = \sum_{(1)} g_1 = \prod_{i=1}^{m}(1+x_i)^n, \tag{10}$$

$$\alpha_2(m,n) = \sum_{(1)} g_2 = (1+x)^{mn}, \tag{11}$$

$$\alpha_3(m,n) = \sum_{(1)} g_3 = [(2^m-1)x+1]^n, \tag{12}$$

$$\alpha_4(m,n) = \sum_{(1)} g_4 = (x+2^m-1)^n, \tag{13}$$

$$\alpha_5(m,n) = \sum_{(1)} g_5 = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+x_i^j), \tag{14}$$

$$\alpha_6(m,n) = \sum_{(1)} g_6 = \prod_{j=1}^{n}(1+x^j)^m; \tag{15}$$

$$\beta_1(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_1 = \prod_{i=1}^{m}[(1+x_i)^n-1], \tag{16}$$

$$\beta_2(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_2 = [(1+x)^n-1]^m, \tag{17}$$

$$\beta_3(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_3 =$$

$$\sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i}\binom{m}{i}[(2^i-1)x+1]^n, \quad (18)$$

$$\beta_4(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_4 =$$

$$(x+2^m-1)^n + (2^n-1)^m - 2^{mn}, \quad (19)$$

$$\beta_5(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_5 = \prod_{i=1}^{m}[\prod_{j=1}^{n}(1+x_i^j)-1], \quad (20)$$

$$\beta_6(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_6 = [\prod_{j=1}^{n}(1+x_j^j)-1]^m. \quad (21)$$

文[1] 指出了式(10) ~ (21) 的一些变换与应用，例如

$$\sum_{(1)} (|A_1|+\cdots+|A_m|)x^{|A_1|+\cdots+|A_m|} =$$

$$mnx(1+x)^{mn-1}, \quad (22)$$

$$\sum_{(1)} |A_1|\cdots|A_m|\, x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|} =$$

$$n^m x_1\cdots x_m(1+x_1)^{n-1}\cdots(1+x_m)^{n-1}, \quad (23)$$

$$\sum_{(1)} |A_1\cup\cdots\cup A_m|\, x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} =$$

$$n(2^m-1)x[(2^m-1)x+1]^{n-1}. \quad (24)$$

2. 有序覆盖计数问题

定义 1 对集合 A，如集合 $A_1,\cdots,A_m \subset A$，$A_1\cup\cdots\cup A_m = A, m\in \mathbf{Z}^+$，则称 m 集组$(A_1,\cdots,A_m)$为 A 的有序 m 覆盖，简称为有序覆盖；若 $A_i \neq \varnothing$，$i\in N_m$，则称$(A_1,\cdots,A_m)$为 A 的非空有序 m 覆盖，简称为非空有序覆盖.

定理 1 和式

$$\gamma_1(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_1 = \sum_{\substack{A_1,\cdots,A_m\subset N_n\\ A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n}} x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|} =$$

$$[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)-1]^n, \quad (25)$$

$$\gamma_2(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_2 = \sum_{(1)(2)} x^{|A_1|+\cdots+|A_m|} =$$

$$[(1+x)^m-1]^n. \quad (26)$$

证明 $\gamma_1(m,n) = \prod_{a\in N_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le m\\ a\in A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_i}}} x_{j_1}\cdots x_{j_i} =$

$\prod_{a\in N_n}[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i)-1]$ = 式(25) 右边. 在式(25) 中令 $x_1 = \cdots x_m = x$ 即得式(26).

例 1 在式(26) 中令 $x = \pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)} 1 = (2^m-1)^n, \quad (27)$$

$$\sum_{(1)(3)} (-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = (-1)^n. \quad (28)$$

在式(25) 两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\frac{\partial^m\gamma_1(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_3 g_1 = x_1\cdots x_m\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^m\cdot$$

$$[(1+x_1)\cdots(1+x_m)]^{j-1}. \quad (29)$$

在式(29) 中令 $x_1 = \cdots = x_m = \pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)} |A_1|\cdots|A_m| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}2^{m(j-1)}j^m, \quad (30)$$

$$\sum_{(1)(2)} |A_1|\cdots|A_m|(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|} =$$

$$(-1)^{m+n-1}n. \quad (31)$$

在式(26) 两边对 x 求导数后再乘 x 得

$$\sum_{(1)(2)} f_2 g_2 = mnx(1+x)^{m-1}[(1+x)^m-1]^{n-1}, \quad (32)$$

在式(32) 中令 $x = \pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)} (|A_1|+\cdots+|A_m|) = 2^{m-1}mn(2^m-1)^{n-1}, \quad (33)$$

$$\sum_{(1)(2)} (|A_1|+\cdots+|A_m|)(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|} =$$

$$0, m\geqslant 2. \quad (34)$$

式(27)，(28) 表明：N_n 的有序 m 覆盖个数 $R_1 = (2^n-1)^m$，其中偶(奇) 宽度有序 m 覆盖个数记为 $P_1(Q_1)$，则 $P_1 - Q_1 = (-1)^n$，$P_1 = [(2^m-1)^n + (-1)^n]/2$，$Q_1 = [(2^m-1)^n - (-1)^n]/2$.

式(30)，(31) 表明：N_n 的全体有序 m 覆盖的广度之总和 R_2 = 式(30) 右边，其中偶(奇) 宽度有序 m 覆盖的广度和记为 $P_2(Q_2)$，则 $P_2 - Q_2 = (-1)^{m+n-1}n$，$P_2 = [R_2 - (-1)^{m+n}n]/2$，$Q_2 = [R_2 + (-1)^{m+n}n]/2$.

式(33)，(34) 表明：N_n 的全体有序 m 覆盖的宽度之总和 $R_3 = 2^{m-1}mn(2^m-1)^{n-1}$，其中偶(奇) 宽度有序 m 覆盖的宽度和记为 $P_3(Q_3)$，则当 $m\geqslant 2$ 时，$P_3 = Q_3 = 2^{m-2}mn(2^m-1)^{n-1}$.

定理 2 和式

$$\gamma_3(m,n) = \sum_{(1)(3)} g_3 = \sum_{(1)(3)} x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} =$$

$$(2^m-1)^n x^n, \tag{35}$$

$$\gamma_4(m,n)=\sum_{(1)(2)} g_4=\sum_{(1)(2)} x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}=(x+2^m-2)^n. \tag{36}$$

证明 由式(27)立得 $\gamma_3(m,n)=\sum_{(1)(2)} x^n=(2^m-1)^n x^n$. 下证式(36). 任给 $k\in N_{0,n}$,设 $|A_1\cap\cdots\cap A_m|=k$,则 $A_1\cap\cdots\cap A_m$ 有 $\binom{n}{k}$ 种选择. 对确定的 $A_1\cap\cdots\cap A_m=A=\{a_1,\cdots,a_k\}$,每一 $a_i(i\in N_k)$ 均必属于 $A_j(j\in N_m)$;每个 $a\in N_n-A$ 均可属于 A_j 或不属于 $A_j(j\in N_m)$,但 a 不能同时属于或同时不属于 $A_1,\cdots,A_m$,由乘法原理知 a 有 2^m-2 种选择. 因此由乘法原理,满足 $A_1\cap\cdots\cap A_m=A$,$A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n$ 的集组 $(A_1,\cdots,A_m)$ 共有 $(2^m-2)^{n-k}$ 个. 由加法原理和二项式定理得

$$\gamma_4(m,n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2^m-2)^{n-k}x^k=(x+2^m-2)^n.$$

例 2 在式(36)中令 $x=\pm1$ 得式(27)和

$$\sum_{(1)(2)}(-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}=(2^m-3)^n. \tag{37}$$

在式(36)两边对 x 求导数后再乘 x 得

$$\sum_{(1)(2)} f_3 g_4=nx(x+2^m-2)^{n-1}. \tag{38}$$

在式(38)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)}|A_1\cap\cdots\cap A_m|=n(2^m-1)^{n-1}, \tag{39}$$

$$\sum_{(1)(2)}|A_1\cap\cdots\cap A_m|(-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|}=-n(2^m-3)^{n-1}. \tag{40}$$

式(27),(37)表明:设 N_n 的偶(奇)浓度有序 m 覆盖个数为 $P_4(Q_4)$,则 $P_4-Q_4=(2^m-3)^n$,$P_4=[(2^m-1)^n+(2^m-3)^n]/2$,$Q_4=[(2^m-1)^n-(2^m-3)^n]/4$.

式(39),(40)表明:N_n 的全体有序 m 覆盖的浓度之总和 $R_5=n(2^m-1)^{n-1}$,其中偶(奇)浓度有序 m 覆盖的浓度和记为 $P_5(Q_5)$,则 $P_5-Q_5=-n(2^m-3)^{n-1}$,$P_5=n[(2^m-1)^{n-1}-(2^m-3)^{n-1}]/2$,$Q_5=n[(2^m-1)^{n-1}+(2^m-3)^{n-1}]/2$.

定理 3 和式

$$\gamma_5(m,n)=\sum_{(1)(2)} g_5=\sum_{(1)(2)} x_1^{\tau(A_1)}\cdots x_m^{\tau(A_m)}=\prod_{k=1}^{n}\left[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i^k)-1\right], \tag{41}$$

$$\gamma_6(m,n)=\sum_{(1)(2)} g_6=\sum_{(1)(2)} x^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=\prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^m-1]. \tag{42}$$

证明 类似于定理1之证明,可得

$$\gamma_5(m,n)=\prod_{k\in N_n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le m\\ k\in A_{j_1}\cap\cdots\cap A_{j_i}}} x_{j_1}^k\cdots x_{j_i}^k=\prod_{k\in N_n}\left[\prod_{i=1}^{m}(1+x_i^k)-1\right]=$$

式(41)右边.

在式(41)中令 $x_1=\cdots=x_m=x$,即得式(42).

例 3 在式(42)中令 $x=\pm1$ 得式(27)和

$$\sum_{(1)(2)}(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=(-1)^n(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]}, \tag{43}$$

其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数.

在式(41)两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\frac{\partial^m\gamma_5(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$ 得

$$\sum_{(1)(2)} f_5 g_5=x_1\cdots x_n\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_r\le n\\ j_1+\cdots+j_r=r}} r^m[(1+x_1)\cdots(1+x_m)]^{r-1}. \tag{44}$$

在式(44)中令 $x_1=\cdots=x_m=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)}\tau(A_1)\cdots\tau(A_m)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_r\le n\\ j_1+\cdots+j_r=r}} r^m 2^{m(r-1)}, \tag{45}$$

$$\sum_{(1)(2)}\tau(A_1)\cdots\tau(A_m)(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=-1. \tag{46}$$

在式(42)两边对 x 求导数后再乘 x 得

$$\sum_{(1)(2)} f_6 g_6=mx\prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^m-1]\sum_{i=1}^{n}\frac{ix^{i-1}(1+x^i)^{m-1}}{(1+x^i)^m-1} \tag{47}$$

在式(47)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)}[\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)]=2^{m-2}(2^m-1)^{n-1}mn(n+1). \tag{48}$$

$$\sum_{(1)(2)}[\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)](-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)}=(-1)^{n-1}2^{m-1}(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}. \tag{49}$$

式(27),(43)表明:设 N_n 的偶(奇)密度有序 m 覆盖个数为 $P_6(Q_6)$,则 $P_6-Q_6=(-1)^n(1-$

$2^m)^{[\frac{n}{2}]}$，$P_6=(-1)^n[(1-2^m)^n+(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]}]/2$，$Q_6=(-1)^n[(1-2^m)^n-(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]}]/2$.

式(45)，(46)表明：N_n 的全体有序 m 覆盖的跨度之总和 $R_7=$ 式(45)右边，其中偶(奇)密度有序 m 覆盖的跨度和记为 $P_7(Q_7)$，则 $P_7-Q_7=-1$，$P_7=(R_7-1)/2$，$Q_7=(R_7+1)/2$.

式(48)，(49)表明：N_n 的全体有序 m 覆盖的密度之总和 $R_8=2^{m-2}(2^m-1)^{n-1}mn(n+1)$，其中偶(奇)密度有序 m 覆盖的密度和记为 $P_8(Q_8)$，则 $P_8-Q_8=(-1)^{n-1}2^{m-1}(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}$，$P_8=(-1)^{n-1}\cdot 2^{m-3}[(1-2^m)^{n-1}\cdot mn(n+1)+2(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}]$，$Q_8=(-1)^{n-1}2^{m-3}[(1-2^m)^{n-1}mn(n+1)-2(1-2^m)^{[\frac{n}{2}]-1}]$.

对定理1，2，3，还可以利用微积分和赋值法，进行更深入的探究.

3. 限定子集非空的有序覆盖计数问题

定理4 和式

$$\delta_1(m,n)=\sum_{(1)(2)(3)}g_1=\sum_{\substack{A_1,\cdots,A_m\subset N_n\\A_1\cup\cdots\cup A_m=N_n\\A_1,\cdots,A_m\neq\varnothing}}x_1^{|A_1|}\cdots x_m^{|A_m|}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}[(1+x_{j_1})\cdots(1+x_{j_i})-1]^n,\tag{50}$$

$$\delta_2(m,n)=\sum_{(1)(2)(3)}g_2=\sum_{(1)(2)(3)}x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}[(1+x)^i-1]^n.\tag{51}$$

证明 记 V 为 N_n 的全体有序 m 覆盖 $(A_1,\cdots,A_m)$ 之集合，V_j 为 N_n 的满足 $A_j=\varnothing$ 的有序 m 覆盖 $(A_1,\cdots,A_m)$ 之集合，则满足条件(1)(2)(3)的 m 集组 $(A_1,\cdots,A_m)$ 之集合为 $V-(V_1\cup\cdots\cup V_m)$. 由 m 阶容斥原理的权形式和定理1得

$$\delta_1(m,n)=\sum_{(1)(2)(3)}g_1=\sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V-(V_1\cup\cdots\cup V_m)}g_1=\sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V}g_1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m\\(A_1,\cdots,A_m)\in V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_k}}}g_1.$$

注意到 $V_1\cap\cdots\cap V_m=\varnothing$，并换 $m-k$ 为 i，则

$$\delta_1(m,n)=\sum_{(1)(2)}g_1+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m\\A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_i}=N_n}}x_{j_1}^{|A_{j_1}|}\cdots x_{j_i}^{|A_{j_i}|}=[(1+x_1)\cdots(1+x_m)-1]^n+\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\cdot\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant m}[(1+x_{j_1})\cdots(1+x_{j_i})-1]^n=\text{式(50)右边}.$$

在式(50)中令 $x_1=\cdots=x_m=x$，即得式(51).

例4 在式(51)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}1=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n.\tag{52}$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=(-1)^{m+n-1}.\tag{53}$$

在式(50)两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\frac{\partial^m\delta_1(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$，可得与式(29)相同的结果，即

$$\sum_{(1)(2)(3)}f_3g_1=\sum_{(1)(2)}f_3g_1=\text{式(29)右边}.\tag{54}$$

从而令 $x_1=\cdots=x_m=\pm1$，可得与式(30)，(31)相同的结果，即

$$\sum_{(1)(2)(3)}|A_1|\cdots|A_m|=\sum_{(1)(2)}|A_1|\cdots|A_m|=\text{式(30)右边},\tag{55}$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}|A_1|\cdots|A_m|(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\sum_{(1)(2)}|A_1|\cdots|A_m|(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\text{式(31)右边}=(-1)^{m+n-1}n.\tag{56}$$

在式(51)两边对 x 求导后再乘 x 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)x^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}nix(1+x)^{i-1}\cdot[(1+x)^i-1]^{n-1}.\tag{57}$$

在式(57)中令 $x=\pm1$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)=mn\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\binom{n-1}{j}2^j(2^{j+1}-1)^{m-1}.\tag{58}$$

$$\sum_{(1)(2)(3)}(|A_1|+\cdots+|A_m|)(-1)^{|A_1|+\cdots+|A_m|}=(-1)^{m+n-1}mn.\tag{59}$$

式(52)，(53)表明：N_n 的非空有序 m 覆盖个数 $R'_1=$ 式(52)右边，其中偶(奇)宽度非空有序 m 覆

盖个数记为 $P'_1(Q'_1)$,则

$$P'_1 - Q'_1 = (-1)^{m+n-1},$$
$$P'_1 = [R'_1 - (-1)^{m+n}]/2,$$
$$Q'_1 = [R'_1 + (-1)^{m+n}]/2.$$

式(55),(56)表明:N_n 的全体非空有序 m 覆盖的广度之总和 $R_2 = R'_2$,其中偶(奇)宽度非空有序 m 覆盖个数记为 $P'_2(Q'_2)$,$P'_2 = P_2$,$Q'_2 = Q_2$.

式(58),(59)表明:N_n 的全体非空有序 m 覆盖的宽度之总和 $R'_3 =$ 式(58)右边,其中偶(奇)宽度非空有序 m 覆盖的宽度和记为 $P'_3(Q'_3)$,则 $P'_3 - Q'_3 = (-1)^{m+n-1}mn$,$P'_3 = [R'_3 - (-1)^{m+n}mn]/2$,$Q'_3 = [R'_3 + (-1)^{m+n}mn]/2$.

定理5 和式

$$\delta_3(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_3 = \sum_{(1)(2)(3)} x^{|A_1\cup\cdots\cup A_m|} = x^n \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n, \quad (60)$$

$$\delta_4(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_4 = \sum_{(1)(2)(3)} x^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = (x+2^m-2)^n + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n. \quad (61)$$

证明 由式(52)立得 $\delta_3(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} x^n =$ 式(60)右边. 又 $\delta_4(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_4 - [\sum_{(1)(2)} 1 - \sum_{(1)(2)(3)} 1]$,由式(36),(27),(52)代入得证式(61).

例5 在式(61)中令 $x = \pm 1$ 得式(52)和

$$\sum_{(1)(2)(3)} (-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = (2^m-3)^n + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n. \quad (62)$$

在式(61)两边对 x 求导数后再乘 x 可得与式(38)相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} f_5 g_4 = \sum_{(1)(2)} f_5 g_4 = nx(x+2^m-2)^{n-1}. \quad (63)$$

从而令 $x = \pm 1$,可得与式(39),(40)相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} |A_1\cap\cdots\cap A_m| = \sum_{(1)(2)} |A_1\cap\cdots\cap A_m| = n(2^m-1)^{n-1}, \quad (64)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} |A_1\cap\cdots\cap A_m|(-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = \sum_{(1)(2)} |A_1\cap\cdots\cap A_m|(-1)^{|A_1\cap\cdots\cap A_m|} = -n(2^m-3)^{n-1}. \quad (65)$$

式(52),(62)表明:设 N_n 的偶(奇)浓度非空有序 m 覆盖个数为 $P'_4(Q'_4)$,则 $P'_4 - Q'_4 =$ 式(62)右边,$P'_4 = [(2^m-1)^n + (2^m-3)^n]/2 + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i-1)^n$,$Q'_4 = [(2^m-1)^n - (2^m-3)^n]/2$.

定理6 和式

$$\delta_5(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_5 = \sum_{(1)(2)(3)} x_1^{r(A_1)}\cdots x_m^{r(A_m)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le m}\prod_{k=1}^{n}[(1+x_{j_1}^k)\cdots(1+x_{j_i}^k)-1], \quad (66)$$

$$\delta_6(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_6 = \sum_{(1)(2)(3)} x^{r(A_1)+\cdots+r(A_m)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^i-1]. \quad (67)$$

证明 沿用定理4证明之符号和方法,由 m 阶容斥原理的权形式和定理3得

$$\delta_5(m,n) = \sum_{(1)(2)(3)} g_5 = \sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V-(V_1\cup\cdots\cup V_m)} g_5 = \sum_{(A_1,\cdots,A_m)\in V} g_5 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k \sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_k\le m\\(A_1,\cdots,A_m)\in V_{j_1}\cap\cdots\cap V_{j_k}}} g_5.$$

注意到 $V_1\cap\cdots\cap V_m = \varnothing$,并换 $m-k$ 为 i,则

$$\delta_5(m,n) = \sum_{(1)(2)} g_5 + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_i\le m\\A_{j_1}\cup\cdots\cup A_{j_i}=N_n}} x_{j_1}^{r(A_{j_1})}\cdots x_{j_i}^{r(A_{j_i})} = \prod_{k=1}^{n}[(1+x_1^k)\cdots(1+x_m^k)-1] + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_i\le m}\prod_{k=1}^{n}[(1+x_{j_1}^k)\cdots(1+x_{j_i}^k)-1] = \text{式(66)右边}.$$

在式(66)中令 $x_1 = \cdots = x_m = x$,即得式(67).

例6 在式(67)中令 $x = \pm 1$ 得式(52)和

$$\sum_{(1)(2)(3)} (-1)^{r(A_1)+\cdots+r(A_m)} = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+n-i}\binom{m}{i}(1-2^i)^{[\frac{n}{2}]}. \quad (68)$$

在式(66)两边对 $x_1,\cdots,x_m$ 求偏导数 $\frac{\partial^m \delta_5(m,n)}{\partial x_1\cdots\partial x_m}$ 后再乘 $x_1\cdots x_m$,可得与式(44)相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} f_7 g_5 = \sum_{(1)(2)} f_7 g_5 = \text{式(44) 右边}. \quad (69)$$

从而令 $x_1 = \cdots = x_m = \pm 1$,可得与式(45),(46) 相同的结果,即

$$\sum_{(1)(2)(3)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m) = \sum_{(1)(2)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m) = \text{式(45) 右边}, \quad (70)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m)(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = \sum_{(1)(2)} \tau(A_1)\cdots\tau(A_m)(-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = -1. \quad (71)$$

在式(67) 两边对 x 求导数后再乘 x 得

$$\sum_{(1)(2)(3)} f_6 g_6 = x\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i} i \prod_{k=1}^{n}[(1+x^k)^i - 1]\sum_{j=1}^{n}\frac{j x^{j-1}(1+x^j)^{i-1}}{(1+x^j)^i - 1}. \quad (72)$$

在式(72) 中令 $x = \pm 1$ 得

$$\sum_{(1)(2)(3)} [\tau(A_1) + \cdots + \tau(A_m)] = mn(n+1)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}\binom{m-1}{i} 2^{i-1}(2^{i+1}-1)^{n-1}, \quad (73)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} [\tau(A_1) + \cdots + \tau(A_m)](-1)^{\tau(A_1)+\cdots+\tau(A_m)} = m\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m+n-i}2^i(1-2^{i+1})^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}. \quad (74)$$

式(52),(68) 表明:设 N_n 的偶(奇) 密度非空有序 m 覆盖个数为 $P'_6(Q'_6)$,则 $P'_6 - Q'_6$ = 式(68) 右边,$P'_6 = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+n-i}\binom{m}{i}[(1-2^i)^n + (1-2^i)^{[\frac{n}{2}]}]/2$,$Q'_6 = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{m+n-i}\binom{m}{i}\cdot[(1-2^i)^n - (1-2^i)^{[\frac{n}{2}]}]/2$.

式(73),(74) 式表明:N_n 的全体非空有序 m 覆盖的密度之总和 R'_8 = 式(73) 右边,其中偶(奇) 密度非空有序 m 覆盖的密度和记为 $P'_8(Q'_8)$,则 $P'_8 - Q'_8$ = 式(74) 右边,P'_8 = [式(73) 右边 + 式(74) 右边]/2,Q'_8 = [式(73) 右边 - 式(74) 右边]/2.

4. 若干说明和补充

文[1] 的若干说明如下:强度、烈度(集函数 ⑩,⑪) 应定义在 $A \subset \mathbb{R}$(实数集) 的前提下;厚度(集函数 ⑫) 为非负整数. 文[1] 中的式(20) 应为 $\sum_{(1)}(|A_1| + \cdots + |A_m|)x^{|A_1|+\cdots+|A_m|} = mnx(1+x)^{mn-1}$,式(53) 的第一式应为 $\sum_{(1)(3)} |A_1 \cup \cdots \cup A_m| \cdot (-1)^{|A_1 \cup \cdots \cup A_m|} = n\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(1-2^i)(2-2^i)^{n-1}$.

由本文式(36),(38),(61),(63),令 $x = 2$ 可得若干有趣式子,写成:

例 7

$$\sum_{(1)(2)} 2^{|A_1 \cap \cdots \cap A_m|} = 2^{mn}, \quad (75)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} 2^{|A_1 \cap \cdots \cap A_m|} = 2^{mn} + \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}(2^i - 1)^n, \quad (76)$$

$$\sum_{(1)(2)(3)} |A_1 \cap \cdots \cap A_m| \cdot 2^{|A_1 \cap \cdots \cap A_m|} = \sum_{(1)(2)} |A_1 \cap \cdots \cap A_m| \cdot 2^{|A_1 \cap \cdots \cap A_m|} = 2^{mn-m+1}n. \quad (77)$$

参考文献

[1] 吴康,苏文龙,罗海鹏,等. 限定条件的有序集组计数(Ⅰ)[J]. 中学数学研究,2007(6):43-48.

[2] LOUIS COMTET. 高等组合学[M]. 谭明术,等,译. 大连:大连理工大学出版社,1991.

[3] 王天明. 近代组合学[M]. 大连:大连理工大学出版社,2008.

作者简介

吴康,1957 年生,男,华南师范大学数学科学学院副教授,硕士研究生导师,数学教育指导组(硕士和教育硕士) 组长。原《中学数学研究》主编。

数学教育专家,数学竞赛研究专家,初等数学研究专家。首批中国数学奥林匹克高级教练,原 IMO 中国国家集训队教练。

主要学术兼职:全国初等数学研究会副理事长兼秘书长,《初等数学研究》副主编,中国高等教育学会教育数学专业委员会副秘书长,《数学教育学报》编委,丘成桐中学数学奖南部赛区组委会主任等。

主要学术荣誉:广西壮族自治区科技进步奖一等奖(2001 年)、二等奖(2007 年),广西科学院科技进步奖特等奖(2000 年,2007 年),广东省高校教学成果奖一等奖(2004 年)。

两个三元不等式及其应用

杨学校

（福州第二十四中学，福建 福州 350015）

摘　要：本文给出了关于三元对称代数不等式的两个定理，并由之给出了一类三元对称代数不等式的统一证法，尤其对证明次数较高时的不等式较为方便.

关键词：不等式　取等号

本文先给出两个三元不等式定理，再举例说明其应用. 文中"$\sum$"表示循环和，"$\prod$"表示循环积.

定理1　设 $\lambda,u,v\in\mathbf{R}^+$，记 $s_1=\lambda+u+v$，$s_2=uv+v\lambda+\lambda u$，$s_3=\lambda uv$，$x=\dfrac{s_1}{3\sqrt[3]{s_3}}$，$y=\dfrac{s_2}{3\sqrt[3]{s_3^2}}$，则

ⅰ）$3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}\overset{(1)}{\leqslant}8x^3\overset{(2)}{\leqslant}3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$；

ⅱ）$3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}\overset{(3)}{\leqslant}8y^3\overset{(4)}{\leqslant}3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$.

当且仅当 λ,u,v 中有两个数相等且不小于第三个数时，(1)，(4) 两式取等号；当且仅当 λ,u,v 中有两个数相等，且不大于第三个数时，(2)、(3) 两式取等号.

证明　ⅰ）由于

$$(u-v)^2(v-\lambda)^2(\lambda-u)^2=-4s_1^3s_3+s_1^2s_2^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-27s_3^2=\frac{s_3}{16s_1^3}[(s_1s_2-s_3)(s_1s_2-9s_3)^3-(8s_1^3s_3-s_1^2s_2^2-18s_1s_2s_3+27s_3^2)^2]\geqslant0$$

因此，得到

$$(8s_1^3s_3-s_1^2s_2^2-18s_1s_2s_3+27s_3^2)^2\leqslant(s_1s_2-s_3)(s_1s_2-9s_3)^3$$

用 x,y 代入，得到

$$[8x^3-3(xy)^2-6xy+1]^2\leqslant(xy-1)^3(9xy-1)$$

由上式即得(1)，(2) 两式.

当 $\lambda=u\geqslant v$ 时

$$8x^3-3(xy)^2-6xy+1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}=$$

$$8\frac{(2\lambda+v)^3}{27\lambda^2v}-\frac{(2\lambda+v)^2(\lambda+2v)^2}{27\lambda^2v^2}+\frac{18(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{27\lambda v}+1+[\frac{(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{9\lambda v}-1]\cdot\sqrt{[\frac{(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{\lambda v}-1][\frac{(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{9\lambda v}-1]}=$$

$$\frac{4}{27\lambda^2v^2}[(-\lambda^2+v^2)(\lambda-v)^2+(\lambda-v)^2\cdot|\lambda^2-v^2|]=0$$

即此时式(1) 取等号. 同理可得式(2) 取等号条件.

ⅱ）下面仅证式(3)，式(4) 证法与之类似(从略).

由式(2) 有

$$8x^3\leqslant3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$$

两边同除以 $(xy)^3$，得到

$$\frac{8}{y^3}\leqslant\frac{3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}}{(xy)^3}=$$

$$\frac{[3(xy)^2+6xy-1]^2-(xy-1)^3(9xy-1)}{(xy)^3[3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}]}=$$

$$\frac{64(xy)^3}{(xy)^3[3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}]}=$$

$$\frac{64}{3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}}$$

由此即得式(3)，显然式(3) 取等号条件同式(2).

由定理1及 $(9xy-5)-\dfrac{8}{9xy-5}\geqslant$

$3\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$(此式易证,从略),可得以下结果.

推理1 同定理1条件,有

$$16xy-4+\frac{4(xy-1)}{9xy-5}\overset{(5)}{\leqslant}12x^3\overset{(6)}{\leqslant}9(xy)^2+2xy+1-\frac{4(xy-1)}{9xy-5}$$

$$16xy-4+\frac{4(xy-1)}{9xy-5}\overset{(7)}{\leqslant}12y^3\overset{(8)}{\leqslant}9(xy)^2+2xy+1-\frac{4(xy-1)}{9xy-5}$$

当且仅当 $\lambda=u=v$ 时,(5)、(6)、(7)、(8)四式取等号.

由推理1易得:

推理2 同定理1条件,有

$$\frac{-1+2\sqrt{27y^3-2}}{9y}\overset{(9)}{\leqslant}x\overset{(10)}{\leqslant}\frac{27y^3+28+\sqrt{729y^6-648y^3+208}}{72y}$$

$$\frac{-1+2\sqrt{27x^3-2}}{9x}\overset{(11)}{\leqslant}y\overset{(12)}{\leqslant}\frac{27x^3+28+\sqrt{729x^6-648x^3+208}}{72x}$$

当且仅当 $\lambda=u=v$ 时,(9)、(10)、(11)、(12)四式均取等号.

定理2 设 $\lambda,u,v\in\mathbf{R}$,记 $s_1=\lambda+u+v,s_2=uv+v\lambda+\lambda u,s_3=\lambda uv,w=\sqrt{s_1^2-3s_2}\,(0\leqslant w\leqslant s_1)$,则

$$\frac{s_1^3-3s_1w^2-2w^3}{27}=\frac{(s_1-2w)(s_1+w)^2}{27}\overset{(13)}{\leqslant}s_3\overset{(14)}{\leqslant}\frac{(s_1+2w)(s_1-w)^2}{27}=\frac{s_1^3-3s_1w^2+2w^3}{27}$$

当且仅当 λ,u,v 中有两个数相等,且不小于 $\frac{1}{3}s_1$ 时,式(13)取等号;当且仅当 λ,u,v 中有两个数相等,且不大于 $\frac{1}{3}s_1$ 时,式(14)取等号.

证明 由于

$$(u-v)^2(v-\lambda)^2(\lambda-u)^2=$$
$$-4s_1^3s_3+s_1^2s_2^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-27s_3^2=$$
$$-27s_3^2+2(9s_1s_2-2s_1^3)s_3+(s_1^2s_2^2-4s_2^3)\geqslant0$$

由此得到

$$\frac{9s_1s_2-2s_1^3-2(s_1^2-3s_2)^{\frac{3}{2}}}{27}\leqslant s_3\leqslant\frac{9s_1s_2-2s_1^3+2(s_1^2-3s_2)^{\frac{3}{2}}}{27}$$

又由 $w=\sqrt{s_1^2-3s_2}$,得到 $s_2=\frac{s_1^2-w^2}{3}$,代人并整理即得到(13)、(14)两式.由定理1中不等式取等号的条件,易得定理2中不等式取等号的条件.

推理3 同定理2条件,特别当 $s_1=1$ 时,有

$$\frac{1-3w^2-2w^3}{27}=\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\overset{(15)}{\leqslant}\lambda uv\overset{(16)}{\leqslant}\frac{(1+2w)(1-w)^2}{27}=\frac{1-3w^2+2w^3}{27}$$

当且仅当 $\lambda=u=v=\frac{1}{3}$ 时,(15)、(16)两式取等号.

以下举例说明上述两个定理及推论的应用.

例1 (Pham Kim Hung,录自 Tran Phuong 著《DIAMONDS IN Mathematical Inequalities》)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,求证

$$81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\leqslant8(a+b+c)^4\quad(17)$$

证明 (杨学枝,2007.08.01提供)记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc=1,x=\frac{s_1}{3},y=\frac{s_2}{3}$,则

式(17) $\Leftrightarrow 81(s_1^2-2s_2+s_2^2-2s_1+2)\leqslant8s_1^4\Leftrightarrow$
$$8s_1^4-81s_1^2+162s_1-81s_2^2+162s_2-162\geqslant0\Leftrightarrow$$
$$8x^4-9x^2+6x-9y^2+6y-2\geqslant0\quad(18)$$

由定理1的推论2易得到

$$y\leqslant\frac{3x^3+1}{4x}$$

因此

式(18)左边 $=8x^4-9x^2+6x-3y(3y-2)-2\geqslant$
$$8x^4-9x^2+6x-\frac{3x^3+1}{4x}\cdot\left(\frac{3x^3+1}{4x}-2\right)-2=$$
$$\frac{47x^6-72x^4+42x^3-32x^2+24x-9}{16x^2}=$$
$$\frac{(x-1)(47x^5+47x^4-25x^3+17x^2-15x+9)}{16x^2}\geqslant0$$

(注意到 $x\geqslant1$),故式(18)成立,式(17)获证.

例2 (录自罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》,§3.4 Solutions 题16)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,则

$$1+a+b+c\geqslant 2\sqrt{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \quad (19)$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(19)取等号.

证明 (杨学枝,2008.01.01提供)记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc=1$,则式(19)两边经平方并整理后等价于

$$s_1^2+2s_1-4s_2-3\geqslant 0 \quad (20)$$

由定理1的推论2易得

$$s_2\leqslant\frac{s_1^3+9}{4s_1}$$

因此,要证式(20),只要证

$$s_1^2+2s_1-\frac{s_1^3+9}{s_1}-3\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$2s_1^2-3s_1-9\geqslant 0$$

$$(s_1-3)(2s_1+3)\geqslant 0$$

此式显然成立,故式(20)成立,式(19)获证,由以上证明易知取等号的条件.

例3 (2009.01.19《奥数之家》网站,"ppppqqqq"提供)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x^2+y^2+z^2=1$,则

$$\sum\frac{1}{1-yz}\leqslant\frac{4\sum x\sum yz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \quad (21)$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,或其中有一个为零,其余两个都等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,式(21)取等号.

证明 (杨学枝,2009.01.20提供)将式(21)齐次化,得到

$$\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2-yz}\leqslant\frac{4\sum x\sum yz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \quad (22)$$

记 $s_1=\sum x=1,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,将式(22)去分母并经整理,得到

$$\text{式(22)}\Leftrightarrow(s_2-8s_2^2+20s_2^3-16s_2^4)+(3-17s_2+38s_2^2-32s_2^3)s_3+(1-6s_2)s_3^2\geqslant 0$$

$$\text{式(22)}\Leftrightarrow s_2(1-4s_2)(1-2s_2)^2+(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+(1-6s_2)s_3^2\geqslant 0 \quad (23)$$

当 $1-4s_2\geqslant 0$,且 $1-6s_2\geqslant 0$ 时,式(23)显然成立.

当 $1-4s_2\geqslant 0$,且 $1-6s_2\leqslant 0$ 时,由于 $s_2^2\geqslant 3s_2s_3=3s_3$,因此,要证式(23)成立,只要证

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+\frac{1}{3}(1-6s_2)s_2^2s_3\geqslant 0$$

又由于

$$\frac{1}{3}(1-6s_2)s_2^2s_3\geqslant-\frac{1}{3}(1-2s_2)s_2^2s_3$$

因此,只需证

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3-\frac{1}{3}(1-2s_2)s_2^2s_3\geqslant 0$$

易证上式成立,因此,式(23)成立.

当 $1-4s_2\leqslant 0$ 时,记 $s_2=\frac{1-w^2}{3}(w\geqslant 0)$,则 $s_3\geqslant\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}$(定理2的推论3),这时,有

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+(1-6s_2)s_3^2-(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}-(1-6s_2)\left[\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]^2\geqslant$$

$$\left[s_3-\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]\left\{(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)+(1-6s_2)\left[s_3+\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]\right\}\geqslant$$

$$\left[s_3-\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]\left[(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)+2(1-6s_2)s_3\right]\geqslant\left[s_3-\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]\cdot$$

$$\left[(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)+\frac{2}{3}(1-6s_2)s_2^2\right]\geqslant 0$$

(注意到当 $1-4s_2\leqslant 0$ 时,有 $1-6s_2\leqslant 0$)

即有

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+(1-6s_2)s_3^2\geqslant(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}+(1-6s_2)\left[\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]^2$$

因此,要证式(23)成立,只要证

$$\frac{1-w^2}{3}\cdot\left[1-\frac{4(1-w^2)}{3}\right]\left[1-\frac{2(1-w^2)}{3}\right]^2+\left[1-\frac{2(1-w^2)}{3}\right]\left[3-\frac{11(1-w^2)}{3}+16\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^2\right]\cdot\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}+\left[1-\frac{6(1-w^2)}{3}\right]\left[\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}\right]^2\geqslant 0$$

经整理,得到

$\frac{(1+w)(2w-1)}{27^2}(-8w^2+8w^3-50w^4+28w^5-100w^6-32w^7)\geqslant 0$

另外,由 $1-4s_2\leqslant 0$,得到 $2w-1\leqslant 0$,又 $1+w>0$,因此,只要证

$-8w^2+8w^3-50w^4+28w^5-100w^6-32w^7\leqslant 0$

而上式易证成立.事实上,有

$-8w^2+8w^3-50w^4+28w^5-100w^6-32w^7=$

$-8w^2(1-\frac{w}{2})^2-14w^4(1-w)^2-34w^4-86w^6-32w^7\leqslant 0$

因此,当 $1-4s_2\leqslant 0$ 时,式(23)也成立.

综上,式(22)成立,故式(21)获证,易证当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,或 x,y,z 中,有一个为零,其余两个都等于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,式(21)取等号.

例4 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,求证

$$\sum a^3+3\geqslant 2\sum a^2 \tag{24}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(24)取等号.

证明 (杨学枝,2007.08.13 提供)记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc=1$,则式(24)等价于

$s_1^3-3s_1s_2+6-2s_1^2+4s_2\geqslant 0\Leftrightarrow$

$s_1^3-2s_1^2+6\geqslant(3s_1-4)s_2$

又记 $s_1=3x,s_2=3y$,则上式又等价于

$$9x^3-6x^2+2\geqslant(9x-4)y \tag{25}$$

由于 $9y-4\geqslant 5>0$,并由定理1的推论2,有

$$y\leqslant\frac{27x^3+28+\sqrt{729x^6-648x^3+208}}{72x}$$

因此,要证式(25),只要证

$9x^3-6x^2+2\geqslant$

$(9x-4)\cdot\frac{27x^3+28+\sqrt{729x^6-648x^3+208}}{72x}\Leftrightarrow$

$405x^4-324x^3-108x+112\geqslant$

$$(9x-4)\cdot\sqrt{729x^6-648x^3+208} \tag{26}$$

由于

$(405x^4-324x^3-108x+112)^2-$

$(9x-4)^2\cdot(729x^6-648x^3+208)=$

$164\,025x^8-262\,440x^7+104\,976x^6-$

$87\,480x^5+160\,704x^4-72\,576x^3+$

$11\,664x^2-24\,192x+12\,544-$

$(59\,049x^8-52\,488x^7+11\,664x^6-$

$52\,488x^5+46\,656x^4-10\,368x^3+$

$16\,848x^2-14\,976x+3\,328)=$

$104\,976x^8-209\,952x^7+93\,312x^6-$

$34\,992x^5+11\,404x^4-62\,208x^3-$

$5\,184x^2-9\,216x+9\,216=$

$(x-1)(104\,976x^7-104\,976x^6-11\,664x^5-$

$46\,656x^4+67\,392x^3+5\,184x^2-9\,216)=$

$(x-1)^2(104\,976x^6-11\,664x^4-58\,300x^3+$

$9\,092x^2+14\,276x+14\,276)+5\,060(x-1)\geqslant 0$

(注意到 $x\geqslant 1$).故式(26)成立,因此,式(25)也成立,从而式(24)获证.

例5 (录至罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》§8.1. Applicationsti 题88)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)} \tag{27}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(27)取等号.

证明 (杨学枝,2007.05.02 提供)由柯西不等式有

$[\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}]^2\leqslant 2\sum bc\cdot\sum bc(b^2+c^2)$

因此,只要证

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)^2\geqslant 2\sum bc\cdot\sum bc(b^2+c^2) \tag{28}$$

今用定理2的推论3证明式(28).记 $s_1=\sum a=1,s_2=\sum bc,s_3=abc$,代入式(28)经整理后得

$$(1-3s_2+6s_3)^2\geqslant 2s_2(s_2-2s_2^2-s_3)$$

记 $w=\sqrt{1-3s_2}$,即 $s_2=\frac{1-w^2}{3}$,以及 $s_3\geqslant\frac{1-3w^2-2w^3}{27}$,得到

$(\frac{2+3w^2-4w^3}{9})^2\geqslant$

$\frac{2(1-w^2)(2+6w^2+2w^3-6w^4)}{81}\Leftrightarrow$

$w^2(4w^4-20w^3+33w^2-20w+4)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$w^2(2w-1)^2(w-2)^2\geqslant 0$

故式(28)成立,式(27)获证.

例6 (录至 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》)设 $a,b,c\in$

$\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)-ab}+\frac{1}{5(b^2+c^2)-bc}+\frac{1}{5(c^2+a^2)-ca}\geqslant\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\qquad(29)$$

证明 （杨学枝,2007.05.02提供）式(29)经去分母整理后得到其等价式

$$\sum a^2[25(\sum a^2)^2+25\sum b^2c^2-5\sum a^2\sum bc-4abc\sum a]\geqslant 125\sum a^2\sum b^2c^2-25abc\sum a^3-25\sum bc\sum b^2c^2+5abc\sum a\sum bc-141a^2b^2c^2$$

记 $s_1=\sum a=1,s_2=\sum bc,s_3=abc$,则

$$\sum a^2=s_1^2-2s_2$$

$$\sum a^3=s_1^3-3s_1s_2+3s_3$$

$$\sum b^2c^2=s_2^2-2s_1s_3$$

代人上式,并整理得

$$25s_1^6-155s_1^4s_2+345s_1^2s_2^2-54s_1^3s_3-270s_2^3+108s_1s_2s_3\geqslant 125s_1^2s_2^2-275s_2^3-275s_1^3s_3+630s_1s_2s_3-216s_3^2\Leftrightarrow 25s_1^6-155s_1^4s_2+221s_1^3s_3+220s_1^2s_2^2+5s_2^3-522s_1s_2s_3+216s_3^2\geqslant 0$$

即

$$25-155s_2+220s_2^2+5s_2^3+(221-522s_2)s_3+216s_3^2\geqslant 0\qquad(30)$$

ⅰ）当 $s_2=\sum bc\geqslant\frac{1}{4}$ 时,因为 $1-3s_2=(\sum a)^2-3\sum bc\geqslant 0$,所以 $221-522s_2>0$.

记 $w=\sqrt{1-3s_2}\leqslant\frac{1}{2}$,即 $s_2=\frac{1-w^2}{3}$,由定理2的推论3,得

$$\text{式(30)左边}=25-\frac{155(1-w^2)}{3}+\frac{220(1-w^2)^2}{9}+\frac{5(1-w^2)^3}{27}+(47+174w^2)s_3+216s_3^2\geqslant$$

$$25-\frac{155(1-w^2)}{3}+\frac{220(1-w^2)^2}{9}+\frac{5(1-w^2)^3}{27}+\frac{(47+174w^2)(1-3w^2-2w^3)}{27}+\frac{8(1-3w^2-2w^3)^2}{27}=$$

$$\frac{w^2}{3}(5-14w+25w^2-28w^3+3w^4)=$$

$$\frac{w^2}{3}[(1-2w)(5-4w+17w^2+6w^3)+15w^4]\geqslant 0$$

（注意 $1-2w\geqslant 0$）.

ⅱ）当 $s_2=\sum bc\leqslant\frac{1}{4}$ 时,

$$\text{式(30)左边}\geqslant 25-155s_2+220s_2^2=220(\frac{31}{88}-s_2)^2-\frac{405}{176}\geqslant 220(\frac{31}{88}-\frac{1}{4})^2-\frac{405}{176}=0$$

综上ⅰ）、ⅱ）知式(29)成立.

例7 （自创题,2005.12.04）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,则

$$(2\sqrt{3}-3)-9(6\sqrt{3}-5)abc+108abc\sum bc\geqslant 0\qquad(31)$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$,或 a,b,c 中有一个等于 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$,另外两个都等于 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,式(31)取等号.

证明 记 $w=\sqrt{(\sum a)^2-3\sum bc}=\sqrt{1-3\sum bc}$,即 $\sum bc=\frac{1-w^2}{3}(0\leqslant w<1)$,由定理2的推论3,有

$$\text{式(31)左边}=(2\sqrt{3}-3)-[9(6\sqrt{3}-5)-108\sum bc]abc=$$

$$(2\sqrt{3}-3)-[9(6\sqrt{3}-5)-108\cdot\frac{1-w^2}{3}]abc=$$

$$(2\sqrt{3}-3)-(54\sqrt{3}-81+36w^2)abc\geqslant$$

$$(2\sqrt{3}-3)-(54\sqrt{3}-81+36w^2)\cdot\frac{1-3w^2+2w^3}{27}=$$

$$w^2\cdot[\frac{18\sqrt{3}-31}{3}-2(2\sqrt{3}-3)w+4w^2-\frac{8}{3}w^2]=$$

$$w^2(w-\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2\cdot(-\frac{8}{3}w+\frac{8\sqrt{3}-4}{3})\geqslant 0$$

（注意到 $0\leqslant w<1$）,当且仅当 $w=0$ 或 $w=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 时上式取等号.即当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$,或 a,b,c 中有一个等于 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$,另外两个都等于 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,式(31)取等号.

注:本题创作思路:设参数 $\lambda>1$,使

$$(\lambda-1)-27\lambda abc+81abc\sum bc\geqslant 0$$

成立,由定理2的推论3,有

$$\lambda\geqslant\frac{4-2w-3w^2+2w^3}{3-2w}$$

可应用导数求得上式右边最大值为$\frac{6\sqrt{3}-5}{4}$，即取$\lambda=\frac{6\sqrt{3}-5}{4}$，得$w=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

例8 （Pham Kim Hung. 录自 Tran Phuong 著《Diamonds In Mathematical Inequalities》）

设$a,b,c\geqslant 0$，则

$$\sum\frac{bc}{b^2+c^2+3a^2}\leqslant\frac{3}{5}\qquad(32)$$

证明 （杨学枝，2007.08.03 提供）记$s_1=\sum a=1,s_2=\sum bc,s_3=abc$，于是式(32)等价于

$$9-69s_2+180s_2^2-176s_2^3+88s_2s_3-14s_3-36s_3^2\geqslant 0\qquad(33)$$

据定理2的推论3，有$s_2=\frac{1-w^2}{3}$，$0\leqslant w\leqslant 1$，且$\frac{1-3w^2-2w^3}{27}\leqslant s_3\leqslant\frac{1-3w^2+2w^3}{27}$，记式(33)左边为$f(s_3)$，则$f(s_3)$图像是开口向下的抛物线，因此，只需证

$$f\left(\frac{1-3w^2-2w^3}{27}\right)\geqslant 0$$

且

$$f\left(\frac{1-3w^2+2w^3}{27}\right)\geqslant 0$$

即可. 事实上，有

$$f\left(\frac{1-3w^2-2w^3}{27}\right)=9-23(1-w^2)+20(1-w^2)^2-\frac{176(1-w^2)^3}{27}+88\cdot\frac{1-w^2}{3}\cdot\frac{1-3w^2-2w^3}{27}-\frac{14(1-3w^2-2w^3)}{27}-36\cdot\left(\frac{1-3w^2-2w^3}{27}\right)^2=$$

$$\frac{w^2}{81}(57-103w+336w^2+224w^3+544w^4)\geqslant\frac{w^2}{81}(57-103w+336w^2)>0$$

同理，有

$$f\left(\frac{1-3w^2+2w^3}{27}\right)=\frac{w^2}{81}(57+103w+336w^2-224w^3+544w^4)>0$$

（注意到$0\leqslant w\leqslant 1$），故式(33)成立，式(31)获证.

例9 （自创题，2007.09.18）设$a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且$a+b+c=1$，则

$$\frac{7}{abc}-4\sum\frac{1}{a^2}\leqslant 81\qquad(34)$$

当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$，或a,b,c中一个等于$\frac{2}{3}$，其余两个都等于$\frac{1}{6}$时，式(34)取等号.

证明 式(34)$\Leftrightarrow 4(\sum bc)^2-$

$$15abc+81(abc)^2\geqslant 0\qquad(35)$$

记$w=\sqrt{1-3\sum bc}$，即$\sum bc=\frac{1}{3}(1-w^2)$，$0\leqslant w<1$，则由定理2的推论3得到

$$abc\leqslant\frac{(1+2w)(1-w)^2}{27}$$

于是

式(35)左边$\geqslant$

$$4\left[\frac{1}{3}(1-w^2)\right]^2-15\cdot\frac{(1+2w)(1-w)^2}{27}+81\cdot\frac{(1+2w)^2(1-w)^4}{27^2}=$$

$$\frac{(1-w)^2}{9}[4(1+w)^2-5(1+2w)+(1+2w)^2(1-w)^2]=\frac{w^2(1-w)^2(1-2w)^2}{9}\geqslant 0$$

当且仅当$w=0$，即$a=b=c=\frac{1}{3}$；或$w=\frac{1}{2}$，即a,b,c中有一个等于$\frac{2}{3}$，其余两个都等于$\frac{1}{6}$时，上式取等号，即式(34)取等号.

例10 （陈计，2008.01.21 提供）设实数a,b,c满足$\sum a^2=9$，则

$$6\sum a\leqslant abc+26\qquad(36)$$

当且仅当a,b,c中有一个等于1，另外两个都等于2时，式(36)取等号.

证明 （杨学枝，2008.01.21 提供）由题设，可将式(36)写作齐次式

$$6\sum a\cdot\frac{\sum a^2}{9}\leqslant abc+26\left(\sqrt{\frac{\sum a^2}{9}}\right)^3\qquad(37)$$

由此知，要证式(37)，只要证

$$\left(18\sum a\cdot\sum a^2-27abc\right)^2\leqslant 676\left(\sum a^2\right)^3\qquad(38)$$

为证式(38)，令$\sum a=1$，记$w=\sqrt{(\sum a)^2-3\sum bc}=\sqrt{1-3\sum bc}\geqslant 0$，则

$$\sum bc=\frac{1-w^2}{3}$$

根据定理2 的推论3，有

$$abc \geqslant \frac{1-3w^2-2w^3}{27}$$

因此，要证式(38)，只需证

$\left\{18\left[1-\frac{2(1-w^2)}{3}\right]-(1-3w^2-2w^3)\right\}^2 \leqslant$

$676\left[1-\frac{2(1-w^2)}{3}\right]^3 \Leftrightarrow 27(5+15w^2+2w^3)^2 \leqslant$

$676(1+2w^2)^3$ (39)

式(39) 右边 - 式(39) 左边 =

$1+6w^2-540w^3+2\,037w^4-1\,620w^5+5\,300w^6=$

$(1-5w)^2(1+10w+81w^2+20w^3+212w^4) \geqslant 0$

式(39) 成立，故式(38) 成立，从而式(36) 获证，由以上证明易得其取等号的条件.

注：我们还可证明以下三个命题：

1. 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$，且 $\sum a^2=3$，则

$$abc \geqslant \sum bc-2 \geqslant 3\sum a-8$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

2. 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$，且 $\sum a^2=2$，则

$$2abc \geqslant \sum bc-1 \geqslant 2\sum a-4$$

当且仅当 a,b,c 中有一个等于0，其余两个都等于1时取等号.

3. 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$，且 $\sum a^2=9$，则

$$abc \geqslant 2\sum bc-4\sum a+8 \geqslant 6\sum a-26$$

当且仅当 a,b,c 中有一个等于1，其余两个都等于2时取等号.

例11 （录自 罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》，§3.4. Applications 题30）设 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=3$，则

$$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9 \geqslant 10(x^2+y^2+z^2) \quad (40)$$

当且仅当 x,y,z 中有一个等于2，其余两个都等于 $\frac{1}{2}$ 时式(40) 取等号.

证明 （杨学枝，2008.01.21 提供）记 $s_1=x+y+z=3$，$s_2=yz+zx+xy$，$s_3=xyz$，则

式(40) $\Leftrightarrow 8s_2-81s_3+20s_2s_3 \geqslant 0$ (41)

设 $w=\sqrt{s_1^2-3s_2}=\sqrt{9-3s_2}$，即 $s_2=\frac{9-w^2}{3}$ $(0 \leqslant w \leqslant 3)$，则由定理2 的推论3，有

$8s_2-81s_3+20s_2s_3 \geqslant$

$81\cdot\frac{9-w^2}{3}-81\cdot\frac{(3+2w)(3-w)^2}{27}+$

$20\cdot\frac{9-w^2}{3}\cdot\frac{(3+2w)(3-w)^2}{27}=$

$\frac{1}{81}(3-w)(3-2w)^2(10w^2+15w+9) \geqslant 0$

即得式(41)，故式(40) 成立，由 $3-2w=0$，$w=\frac{2}{3}$ 易得取等号的条件.

例12 （自创题，2008.05.07）设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$，求使

$(b^2+c^2+\lambda bc)(c^2+a^2+\lambda ca)(a^2+b^2+\lambda ab) \geqslant$

$(\lambda+2)^3abc(a+b+c)^3$ (42)

成立的最大正数 λ 的值.

证明 记 $s_1=a+b+c=1$，$s_2=bc+ca+ab$，$s_3=abc$，$w=\sqrt{s_1^2-3s_2}=\sqrt{1-3s_2}$ $(0 \leqslant w \leqslant 1)$，则

式(42) 左边 - 式(42) 右边 =

$27[(\lambda-1)^3s_3^2+(\lambda-2)s_3+s_2^2+(\lambda-2)s_2^2+$

$(\lambda^2-5\lambda+4)s_2s_3]-(\lambda+2)^3s_3=$

$27(\lambda-1)^3s_3^2-(\lambda^3+6\lambda^2-15\lambda+62)s_3+$

$27s_2^2+27(\lambda-2)s_2^2+27(\lambda^2-5\lambda+4)s_2s_3 \geqslant$

$\frac{(\lambda-1)^3(1-3w^2+2w^3)^2}{27}-$

$\frac{(\lambda^3+6\lambda^2-15\lambda+62)(1-3w^2+2w^3)}{27}+$

$3(1-w^2)^2+(\lambda-2)(1-w^2)^3+$

$\frac{(\lambda^2-5\lambda+4)(1-w^2)(1-3w^2+2w^3)}{3}=$

$\frac{w^2}{27}[3(-\lambda^3+12\lambda+16)+2(\lambda^3-3\lambda^2-24\lambda-28)w+$

$9(\lambda^3-3\lambda+2)w^2+6(-2\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda-10)w^3+$

$(4\lambda^3-12\lambda^2-15\lambda+50)w^4]=$

$\frac{(\lambda+2)w^2}{27}[3(-\lambda^2+2\lambda+8)+$

$2(\lambda^2-5\lambda-14)w+9(\lambda^2-2\lambda+1)w^2-$

$6(2\lambda^2-7\lambda+5)w^3+(4\lambda^2-20\lambda+25)w^4]=$

$\frac{(\lambda+2)w^2(1-w)^2}{27}[3(-\lambda^2+2\lambda+8)-$

$2(2\lambda^2-\lambda-10)w+(4\lambda^2-20\lambda+25)w^2]=$

$\frac{(\lambda+2)w^2(1-w)^2}{27}[3(\lambda+2)(4-\lambda)-$

$2(2\lambda-5)(\lambda+2)w+(2\lambda-5)^2w^2]$

记 $f(w)=3(\lambda+2)(4-\lambda)-2(2\lambda-5)(\lambda+2)w+$

$(2\lambda-5)^2w^2(0\leqslant w\leqslant 1)$，则当 $0<\lambda\leqslant\frac{5}{2}$ 时，显然有 $f(w)\geqslant 0$；当 $\lambda>\frac{5}{2}$ 时，易知此时函数 $f(w)$ 的图像与 w 轴必有两个不同交点，且其对称轴为 $w=\frac{\lambda+2}{2\lambda-5}>0$，因此，当 $0\leqslant w\leqslant 1$ 时，使得 $f(w)\geqslant 0$ 的充要条件是 $f(1)\geqslant 0$，即

$$f(1)=3(\lambda+2)(4-\lambda)-2(2\lambda-5)(\lambda+2)+(2\lambda-5)^2\geqslant 0$$

由此得到

$$\frac{5}{2}<\lambda\leqslant 3\sqrt{3}-2$$

综上得到

$$0<\lambda\leqslant 3\sqrt{3}-2$$

即 $\lambda_{max}=3\sqrt{3}-2$. 若 $0<\lambda\leqslant 3\sqrt{3}-2$ 时，当且仅当 $a=b=c$，或 a,b,c 中有两个为 0 时式(42) 取等号.

例 13 （陈计，2008.08.24 提供）对于正数 x,y,z，求证

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}+\frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}\geqslant 8+6\sqrt{2} \qquad (43)$$

当且仅当 $x=\sqrt{2},y=z=1$；或 $y=\sqrt{2},z=x=1$；或 $z=\sqrt{2},x=y=1$ 时，式(43) 取等号.

证明 （杨学枝，2008.08.24 提供）记 $s_1=\sum x-1,s_2=\sum yz,s_3=xyz$，经变换，式(43) 等价于

$$s_2-2s_2^2-(9+4\sqrt{2})s_3+(18+12\sqrt{2})s_2s_3\geqslant 0 \quad (44)$$

今证式(44).

记 $w^2=1-3s_2$，即 $s_2=\frac{1-w^2}{3}$，由定理 2 的推论 3，有

$$\text{式(44) 左边}\geqslant\frac{1-w^2}{3}-2\cdot\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^2-(9+4\sqrt{2})\cdot\frac{1-3w^2+2w^3}{27}+(18+12\sqrt{2})\cdot\frac{(1-w^2)(1-3w^2+2w^3)}{81}=$$

$$\frac{3+2\sqrt{2}}{27}(1-w)[(3\sqrt{2}-4)-2w]^2\geqslant 0$$

即式(44) 成立，式(43) 得证，且易知取等号的条件.

例 14 （2008.06.20. "不等式研究网站"，stlb197 提出）在 $\triangle ABC$ 中，有

$$\sum\frac{1}{3\cot^2A+8}\leqslant\frac{1}{3} \qquad (45)$$

证明 （杨学枝，2008.06.20 提供）

式(44)$\Leftrightarrow 3(192+48\sum\cot^2A+9\sum\cot^2B\cot^2C)\leqslant 512+192\sum\cot^2A+72\sum\cot^2B\cot^2C+27\cot^2A\cot^2B\cot^2C\Leftrightarrow$

$$48\sum\cot^2A+45\sum\cot^2B\cot^2C+27\cot^2A\cot^2B\cot^2C\geqslant 64 \qquad (46)$$

令 $\cot^2A=\frac{yz}{x},\cot^2B=\frac{zx}{y},\cot^2C=\frac{xy}{z},x,y,z\in\mathbf{R}^+$，则 $x+y+z=1$，且式(46) 等价于

$$48\sum\frac{yz}{x}+45\sum x^2+27xyz\geqslant 64$$

即

$$48\sum y^2z^2+45xyz\sum x^2+27(xyz)^2\geqslant 64xyz\Leftrightarrow$$

$$48(\sum yz)^2-90xyz\sum yz-115xyz+27(xyz)^2\geqslant 0 \qquad (47)$$

令 $w=\sqrt{1-3\sum yz}$，即 $\sum yz=\frac{1-w^2}{3}$，则由定理 2 的推论 3，有

$$xyz\leqslant\frac{1-3w^2+2w^3}{27}=\frac{(1-w)^2(1+2w)}{27}$$

又由于 $48(\sum yz)^2-90xyz\sum yz-115xyz+27(xyz)^2$ 关于 xyz 递减，因此，要证式(47)，只需证

$$48\cdot\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^2-90\cdot\frac{1-3w^2+2w^3}{27}\cdot\frac{1-w^2}{3}-115\cdot\frac{1-3w^2+2w^3}{27}+\frac{(1-3w^2+2w^3)^2}{27}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(1-w)^2[144(1+w)^2-30(1-w^2)(1+2w)-115(1+2w)+(1-w)^2(1+2w)^2]\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$w^2(1-w)^2(171+56w+4w^2)\geqslant 0$$

上式成立，故式(47) 成立，原命题获证，易知当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，式(45) 取等号.

例 15 （自创题，2004.03.01）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geqslant\sqrt{\frac{4\sum a\sum bc}{(b+c)(c+a)(a+b)}} \qquad (48)$$

当且仅当 $a=b=c$，或 a,b,c 中有一个为 0，其余两个相等时，式(48) 取等号.

证明 应用柯西不等式有

$$\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}\geqslant\frac{(\sum a)^2}{\sum\sqrt{a^2(b+c)}}\geqslant\frac{(\sum a)^2}{\sqrt{\sum a\cdot\sum a^2(b+c)}}$$

因此,要证式(48),只要证

$$\frac{(\sum a)^2}{\sqrt{\sum a\cdot\sum a^2(b+c)}}\geqslant\sqrt{\frac{4\sum a\sum bc}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

即

$$(\sum a)^2\prod(b+c)\geqslant 4\sum bc\sum a^2(b+c)\Leftrightarrow$$

$$\sum a\sum bc[(\sum a)^2-4\sum bc]\geqslant abc[(\sum a)^2-12\sum bc] \tag{49}$$

ⅰ)当$4\sum bc\leqslant(\sum a)^2\leqslant 12\sum bc$时,式(49)显然成立.

ⅱ)当$(\sum a)^2\leqslant 4\sum bc$时,令$s_1=\sum a=1$,$s_2=\sum bc$,$s_3=abc$,$s_2=\frac{1-w^2}{3}\geqslant\frac{1}{4}$,则由定理2中的推论3,有$s_3\geqslant\frac{1-3w^2-2w^3}{27}$,于是,要证式(49),只要证

$$\frac{1-w^2}{3}-4(\frac{1-w^2}{3})^2\geqslant\frac{1-3w^2-2w^3}{27}(1-12\cdot\frac{1-w^2}{3})\Leftrightarrow$$

$$(1+w)(1-2w)^2\geqslant 0$$

故式(49)成立.

综上,式(48)获证,由以上证明易知取等号的条件.

例16 (刘保乾,2008.09.02提供)设$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且$x^2+y^2+z^2=1$,则

$$\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant\sum\frac{1-x}{1-yz}\leqslant 4-\sqrt{2}$$

当且仅当$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,左边不等式取等号;当且仅当x,y,z中,有一个为0,其余两个均为$\frac{\sqrt{2}}{2}$时右边不等式取等号.

证明 (杨学枝,2008.09.02提供)先证左边不等式.由柯西不等式,有

$$\sum\frac{1-x}{1-yz}\geqslant\frac{[\sum(1-x)]^2}{\sum(1-x)(1-yz)}=\frac{(3-\sum x)^2}{3-\sum x-\sum yz+3xyz}$$

因此,要证左边不等式,只要证

$$(3-\sum x)^2\geqslant(\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2})(3-\sum x-\sum yz+3xyz)$$

即

$$[2(\sum x)^2+(9-3\sqrt{3})\sum yz+(-9+9\sqrt{3})\sum x^2]\sqrt{\sum x^2}\geqslant$$

$$(3+3\sqrt{3})\sum x\sum x^2+(27-9\sqrt{3})xyz \tag{50}$$

记$s_1=\sum x$,$s_2=\sum yz$,$s_3=xyz$,则

式(50)$\Leftrightarrow[(-7+9\sqrt{3})s_1^2+(27-21\sqrt{3})s_2]\sqrt{s_1^2-2s_2}\geqslant(3+3\sqrt{3})s_1^3-(6+6\sqrt{3})s_1s_2+(27-9\sqrt{3})s_3$

令$s_1=1$,$s_2=\frac{1-w^2}{3}$,则由定理2的推论3,有

$$s_3\leqslant\frac{1-3w^2+2w^3}{27}$$

因此,要证式(50),只需证

$$[(-7+9\sqrt{3})+(27-21\sqrt{3})\frac{1-w^2}{3}]\sqrt{1-\frac{2(1-w^2)}{3}}\geqslant(3+3\sqrt{3})-(6+6\sqrt{3})\cdot\frac{1-w^2}{3}+(27-9\sqrt{3})\cdot\frac{1-3w^2+2w^3}{27}$$

上式两边平方并整理,得到

$$w^2[(14-6\sqrt{3})-4w-(-60+31\sqrt{3})w^2-(-12+10\sqrt{3})w^3+(110-61\sqrt{3})w^4]\geqslant 0$$

因此,要证式(50),又只需证

$$(14-6\sqrt{3})-4w-(-60+31\sqrt{3})w^2-(-12+10\sqrt{3})w^3+(110-61\sqrt{3})w^4\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(1-w)[(14-6\sqrt{3})-(-10+6\sqrt{3})w+(70-37\sqrt{3})w^2+(82-47\sqrt{3})w^3]+(192-108\sqrt{3})w^4\geqslant 0$$

注意到$14-6\sqrt{3}>-10+6\sqrt{3}\geqslant(-10+6\sqrt{3})w$.

由$1-w\geqslant 0$,易知上式成立,故式(50)成立,原

命题获证. 易知其取等号条件.

同理可证右边不等式(略).

注:本文中定理1、定理2及其推论均创作于2005年11月.

参考文献

[1] TRAN PHUONG. DIAMONDS IN Mathematical Inequalities[M]. Hanoi Publishing House, 2007.

[2] VASILE CIRTOAJE. Algebraic Inequalities. Old and New Methods[M]. GIL Publishing House, 2006.

最值单调定理及其应用

张小明[1]　褚玉明[2]

（1. 浙江广播电视大学海宁学院，浙江　海宁　314400；
2. 湖州师范学院理学院，浙江　湖州　313000）

摘　要：文中证明了"最值单调定理"的一个新结论，并应用它证明某些不等式.

关键词：最值　单调　不等式

本文证明了一个称之为"最值单调定理"的新结果. 作为应用，利用它可以统一证明一些著名不等式. 关于此定理的其他应用，读者可参考文献[1]～[10]，其中《不等式研究通讯》是中国不等式研究小组主办的内部杂志.

1. 最值单调性定理

在这里介绍两个定理如下，我们称之为最大（小）值单调性定理.

定理1　设 $a,b\in\mathbf{R}$，$f:[a,b]^n\to\mathbf{R}$ 有连续偏导数，$c\in[a,b]$，令

$$D_i=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},c)\mid\min_{1\le k\le n-1}\{x_k\}\ge c,$$
$$x_i=\max_{1\le k\le n-1}\{x_k\}\ne c\}\cap[a,b]^n,$$
$$i=1,2,\cdots,n-1$$

若在 D_i 内都有 $\frac{\partial f}{\partial x_i}>0$，则对于 $c\le y_i\le b\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，都有

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},c)\ge f(c,c,\cdots c,c)$$

当且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_{n-1}=c$ 时等号成立.

证明　为了便于说明情况，不妨以三元函数为例. 且设 $y_1>y_2>c$. 对于 $x_1\in[y_2,y_1]$，因 $(x_1,y_2,c)\in D_1$，则有 $f'_{x_1}(x)|_{x=(x_1,y_2,c)}>0$，$f(x_1,y_2,c)$ 关于 x_1 在 $[y_2,y_1]$ 上严格单调增加. 但此时仍有 $f'_{x_1}(x)|_{x=(y_2,y_2,c)}>0$，由偏导数的连续性，知存在 $\varepsilon>0$，使得当 $y_2-\varepsilon\ge c$，$x_1\in[y_2-\varepsilon,y_2]$ 时，有 $f'_{x_1}(x)|_{x=(x_1,y_2,c)}>0$. 所以 $f(x_1,y_2,c)$ 关于 x_1 在 $[y_2-\varepsilon,y_2]\cup[y_2,y_1]=[y_2-\varepsilon,y_1]$ 上严格单调增加. 至此有

$$f(y_1,y_2,c)>f(y_2,y_2,c)>f(y_2-\varepsilon,y_2,c)$$

此时不难发现对于 $x_2\in(y_2-\varepsilon,y_2]$，$(y_2-\varepsilon,x_2,c)\in D_2$，据 f 在 D_2 内的性质，我们有 $f'_{x_2}(y_2-\varepsilon,x_2,c)>0$，则

$$f(y_1,y_2,c)>f(y_2,y_2,c)>f(y_2-\varepsilon,y_2,c)>$$
$$f(y_2-\varepsilon,y_2-\varepsilon,c)$$

若 $y_2-\varepsilon=c$，则命题已得证，否则继续以上工作. 这些不等式中 f 的第一分量和第二分量都是单调减少，且大于等于 c，设它们的极限分别为 s,t，由于连续性，我们有 $f(y_1,y_2,c)>f(s,t,c)$. 若此时 $s\ne c$ 或 $t\ne c$，不断重复以上工作，设它们的下确界为 p,q. 则必有 $p=q=c$，若不然，可继续以上工作，这与下确界的定义矛盾. 定理证毕.

同理可证定理2.

定理2　设 $a,b\in\mathbf{R}$，$f:[a,b]^n\to\mathbf{R}$ 有连续偏导数，$c\in[a,b]$，令

$$D_i=\{(c,x_2,x_3\cdots,x_n)\mid\max_{2\le k\le n}\{x_k\}\le c,$$
$$x_i=\min_{2\le k\le n}\{x_k\}\ne c\},i=2,3,\cdots,n$$

若在 D_i 内都有 $\frac{\partial f}{\partial x_i}<0$，则对于 $a\le x_i\le c$ 都有

$$f(c,x_2,x_3,\cdots,x_n)\ge f(c,c,\cdots c,c)$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=c$.

若以上两个定理中的 f 是对称函数，则在诸 D_i 中，我们只要考虑 D_1 即可. 即得以下两个推论：

推论1　设 $a,b\in\mathbf{R}$，$f:[a,b]^n\to\mathbf{R}$ 为有连续偏导数的对称函数，令

$$D_1=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a\le\min_{1\le k\le n}\{x_k\}<x_1=$$
$$\max_{1\le k\le n}\{x_k\}\le b\}$$

若在 D_1 上都有 $\frac{\partial f}{\partial x_1}>0$，则对于 $a\le x_i\le b$，$i=1$，

$2,\cdots,n,x_{\min}=\min\limits_{1\le k\le n}\{x_k\}$,都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq f(x_{\min},x_{\min},\cdots,x_{\min})$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

推论2 设 $a,b\in\mathbf{R},f:[a,b]^n\to\mathbf{R}$ 为有连续偏导数的对称函数,令

$D_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid a\leq x_n=\min\limits_{1\le k\le n}\{x_k\}<\max\limits_{1\le k\le n}\{x_k\}\leq b\}$

若在 D_n 内都有 $\frac{\partial f}{\partial x_n}<0$,则对于 $a\leq x_i\leq b,i=1,2,\cdots,n,x_{\max}=\max\limits_{1\le k\le n}\{x_k\}$,都有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq f(x_{\max},x_{\max},\cdots,x_{\max})$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立.

2. 一些不等式的统一证明

不加特殊说明,本节设 $n\in\mathbf{N},n\geq 2$

$$a_{\min}=\min_{1\le k\le n}\{a_i\}>0,a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

$$D_1=\{a\mid 0<\min_{1\le k\le n}\{a_k\}<a_1=\max_{1\le k\le n}\{a_k\}\}$$

$$\bar{a}_{\min}=\{a_{\min},a_{\min},\cdots,a_{\min}\}$$

例1 (幂平均不等式) 设 $r\in\mathbf{R}$,且

$$M_r(a)=\begin{cases}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} & (r\neq 0)\\ \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^n a_i} & (r=0)\end{cases}$$

,为 a 的幂平均,则 $M_r(a)$ 关于 r 为单调增加;且当 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全相等时,$M_r(a)$ 关于 r 为严格单调增加.

证明 任取 $r,s\in\mathbf{R},r>s$,下证 $M_r(a)\geq M_s(a)$,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立.由于 $M_r(a)$ 关于 $r\in\mathbf{R}$ 的连续性,我们只要证 $r,s\neq 0$ 的情形.设

$$f(a)=\frac{1}{r}\ln\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^r}{n}\right)-\frac{1}{s}\ln\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^s}{n}\right)$$

则有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}=\frac{a_1^{r-1}}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^r}-\frac{a_1^{s-1}}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^s}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^n(a_1^{r-1}a_i^s-a_1^{s-1}a_i^r)}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^r\cdot\sum\limits_{i=1}^n a_i^s}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^n a_1^{s-1}a_i^r\left[\left(\frac{a_1}{a_i}\right)^{r-s}-1\right]}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^r\cdot\sum\limits_{i=1}^n a_i^s}$$

在 D_1 内,我们易知 $\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}>0$.由推论1,可得 $f(a)\geq f(\bar{a}_{\min})=0$,即

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\geq\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}},M_r(a)\geq M_s(a)$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a_{\min}$ 时等号成立.

例2 (Hölder 不等式) 设 $x_i,y_i>0(i=1,2,\cdots,n),p,q>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\geq\sum_{k=1}^n x_ky_k$$

证明 设 $b_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $f(a)=\left(\sum\limits_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{k=1}^n b_ka_k\right)^{\frac{1}{q}}-\sum\limits_{k=1}^n b_ka_k^{\frac{1}{q}}$,在 D_1 上有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}=\frac{1}{q}b_1\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_ka_k\right)^{\frac{1}{q}-1}-\frac{1}{q}b_1a_1^{\frac{1}{q}-1}=$$

$$\frac{1}{q}b_1a_1^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_ka_k\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\left[\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{p}}a_1^{\frac{1}{p}}-\left(\sum_{k=1}^n b_ka_k\right)^{\frac{1}{p}}\right]>$$

$$\frac{1}{q}b_1a_1^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_ka_k\right)^{-\frac{1}{p}}\cdot$$

$$\left[\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{p}}a_1^{\frac{1}{p}}-\left(\sum_{k=1}^n b_ka_1\right)^{\frac{1}{p}}\right]=0$$

类似可定义 $D_i(i=2,3,\cdots,n)$,且同理可证在 $D_i(i=2,3,\cdots,n)$ 上,都有 $\frac{\partial f(a)}{\partial a_i}>0$ 成立.由定理1知

$$f(a)\geq f(\bar{a}_{\min})=0$$

$$\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_ka_k\right)^{\frac{1}{q}}\geq\sum_{k=1}^n b_ka_k^{\frac{1}{q}}$$

在上式上令 $a_k=\frac{y_k^q}{x_k^p},b_k=x_k^p$,即得 Hölder 不等式.

例3 (Minkowski 不等式) 设 $x_i,y_i>0(i=1,2,\cdots,n),p>1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\geq\left(\sum_{k=1}^n(x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

证明 设 $b_i>0(i=1,2,\cdots,n),f(a)=$

$(\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{\frac{1}{p}} - [\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{\frac{1}{p}}$，在 D_1 上有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1} = \frac{1}{p} b_1 (\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{\frac{1}{p}-1} -$$
$$\frac{1}{p} b_1 a_1^{\frac{1}{p}-1} (a_1^{\frac{1}{p}} + 1)^{p-1} [\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{\frac{1}{p}-1} =$$
$$\frac{1}{p} b_1 (\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{\frac{1}{p}-1} [\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{\frac{1}{p}-1} \cdot$$
$$\{[\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{1-\frac{1}{p}} -$$
$$(1 + a_1^{-\frac{1}{p}})^{p-1} (\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{1-\frac{1}{p}}\} =$$
$$\frac{1}{p} b_1 (\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{\frac{1}{p}-1} [\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{\frac{1}{p}-1} \cdot$$
$$\{[\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{1-\frac{1}{p}} -$$
$$[\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + a_k^{\frac{1}{p}} a_1^{-\frac{1}{p}})^p]^{1-\frac{1}{p}}\} >$$
$$\frac{1}{p} b_1 (\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{\frac{1}{p}-1} [\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{\frac{1}{p}-1} \cdot$$
$$\{[\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{1-\frac{1}{p}} -$$
$$[\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + a_1^{\frac{1}{p}} a_1^{-\frac{1}{p}})^p]^{1-\frac{1}{p}}\} = 0$$

类似可定义 $D_i (i = 2,3,\cdots,n)$，且同理可证在 $D_i (i = 2,3,\cdots,n)$ 上，都有 $\frac{\partial f(a)}{\partial a_i} > 0$ 成立. 由定理 1 知

$$f(a) \geqslant f(\bar{a}_{\min}) = 0$$
$$(\sum_{k=1}^{n} b_k a_k)^{\frac{1}{p}} \geqslant [\sum_{k=1}^{n} b_k (a_k^{\frac{1}{p}} + 1)^p]^{\frac{1}{p}} - (\sum_{k=1}^{n} b_k)^{\frac{1}{p}}$$

在上式中令 $a_k = \frac{y_k^p}{x_k^p}, b_k = x_k^p$，整理即得 Minkowski 不等式.

例 4 设 $r \geqslant \frac{n}{n-1}$，则有

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^r \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^r + (n^r - n)\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)^r$$

证明 设 $0 < t \leqslant a_1^{\frac{(n-r)}{n}}$ 和 $g(t) = a_1^{1-\frac{r}{n}}[a_1 + (n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]^{r-1} - a_1^{r-\frac{r}{n}} - (n^{r-1} - 1)t$.

$$g'(t) = \frac{(r-1)n}{r} a_1^{1-\frac{r}{n}} [a_1 + (n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]^{r-2} \cdot t^{\frac{n-m+r}{m-r}} - (n^{r-1} - 1)$$

$$g''(t) = \frac{(r-1)n}{r^2} a_1^{1-\frac{r}{n}} [a_1 + (n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]^{r-3} t^{\frac{n}{n-r}-2} \cdot$$
$$\left\{(r-2)nt^{\frac{n}{n-r}} + \frac{n-m+r}{n-1}[a_1 + (n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]\right\} \leqslant$$
$$\frac{(r-1)n}{r^2} a_1^{1-\frac{r}{n}} [a_1 + (n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]^{r-3} t^{\frac{n}{n-r}-2} \cdot$$
$$\left\{(r-2)n\, t^{\frac{n}{n-r}} - \frac{m-n-r}{n-1}[t^{\frac{n}{n-r}} + (n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]\right\} =$$
$$\frac{(r-1)n}{r^2} \cdot \frac{2n-n^2}{n-1} a_1^{1-\frac{r}{n}} [a_1 +$$
$$(n-1)t^{\frac{n}{n-r}}]^{r-3} t^{\frac{2n}{n-r}-2} \leqslant 0$$

故 $g(t)$ 关于 t 为凹函数.

同时，可ｉ：$f(a) = (\sum_{i=1}^{n} a_i)^r - \sum_{i=1}^{n} a_i^r - (n^r - n)(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i})^r$，在 D_1 内有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1} =$$
$$\frac{r}{a_1^{1-\frac{r}{n}}}\left[a_1^{1-\frac{r}{n}}(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{r-1} - a_1^{r-\frac{r}{n}} - (n^{r-1} - 1)(\sqrt[n]{\prod_{i=2}^{n} a_i})^r\right] >$$
$$\frac{r}{a_1^{1-\frac{r}{n}}}\left\{a_1^{1-\frac{r}{n}}[a_1 + (n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{i=2}^{n} a_i}]^{r-1} -\right.$$
$$\left. a_1^{r-\frac{r}{n}} - (n^{r-1} - 1)(\sqrt[n]{\prod_{i=2}^{n} a_i})^r\right\}$$

根据闭区间上的凹函数在两个端点的函数值，必有一个为函数的最小值这个性质，由于 $0 < (\sqrt[n]{\prod_{i=2}^{n} a_i})^r \leqslant a_1^{\frac{(n-r)}{n}}$ 和 $g(0+)$ 的存在性，知

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1} > \frac{r}{a_1^{1-\frac{r}{n}}}\{a_1^{1-\frac{r}{n}}[a_1 + (n-1)\sqrt[n-1]{0}]^{r-1} -$$
$$a_1^{r-\frac{r}{n}} - (n^{r-1} - 1)(\sqrt[n]{0})^r\} = 0$$

或

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1} > \frac{r}{a_1^{1-\frac{r}{n}}}\{a_1^{1-\frac{r}{n}}[a_1 + (n-1)\sqrt[n-1]{a_1^{n-1}}]^{r-1} -$$
$$a_1^{r-\frac{r}{n}} - (n^{r-1} - 1)(\sqrt[n]{a_1^{n-1}})^r\} = 0$$

之一成立. 总之 $\frac{\partial f(a)}{\partial a_1} > 0$，由推论 1 知 $f(a) \geqslant f(\bar{a}_{\min}) = 0$，即知命题得证.

著名的 k 次对称平均定义为 $P(a,k) = [\frac{E_n(a,k)}{\binom{n}{k}}]^{\frac{1}{k}}$，其中 $1 \leqslant k \leqslant n$，$E(a,k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}$.

例5 （Maclaurin 不等式） 设 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $P(a,k) \geqslant P(a,k+1)$.

证明 我们用数学归纳法证之. 假设定理对于 $n-1(n \geqslant 3)$ 成立，设

$$f(a(n)) = \left[\binom{n}{k}^{-1} E(a(n),k)\right]^{\frac{k+1}{k}} - \binom{n}{k+1}^{-1} E(a(n),k+1)$$

在 D_1 内我们有

$$\frac{\partial f(a(n))}{\partial a_1} = \frac{k+1}{k}\binom{n}{k}^{-\frac{k+1}{k}} \Big(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k}} \cdot \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=2}^{k} a_{i_j} - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j} =$$

$$\frac{k+1}{k}\binom{n}{k}^{-\frac{k+1}{k}} \binom{n-1}{k-1} \cdot \Big[\sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \big(a_1 \prod_{j=2}^{k} a_{i_j}\big) + \sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big]^{\frac{1}{k}} \cdot \Big[\binom{n-1}{k-1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=2}^{k} a_{i_j}\Big] - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}$$

由数学归纳法和 D_1 的定义知

$$\frac{\partial f(a(n))}{\partial a_1} > \frac{k+1}{k}\binom{n}{k}^{-\frac{k+1}{k}} \binom{n-1}{k-1} \cdot \Big[\sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \Big(\frac{1}{n-k} \sum_{i_1 \neq i_2, \cdots, i_k} a_{i_1} \cdot \prod_{j=2}^{k} a_{i_j}\Big) + \sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big]^{\frac{1}{k}} \cdot \Big[\binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}\Big]^{\frac{k-1}{k}} - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j} =$$

$$\frac{k+1}{k}\binom{n}{k}^{-\frac{k+1}{k}} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k}^{-\frac{k-1}{k}} \cdot \Big[\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j} + \sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big]^{\frac{1}{k}} \cdot \Big(\sum_{2 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big)^{\frac{k-1}{k}} - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j} =$$

$$\frac{k+1}{k}\binom{n}{k}^{-\frac{k+1}{k}} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k}^{-\frac{k-1}{k}} \cdot \Big(\frac{n}{n-k}\Big)^{\frac{1}{k}} \Big(\sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k}} \cdot \Big(\sum_{2 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big)^{\frac{k-1}{k}} - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j} =$$

$$\binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j} - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j} = 0$$

由推论1知 $f(a) \geqslant f(\bar{a}_{min}) = 0$，即知命题得证.

Hamy 对称函数为 $F_n(a,k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \big(\prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\big)^{\frac{1}{k}}$，其相应 Hamy 平均为 $\sigma_n(n,k) = F_n(a,k) / \binom{n}{k}$.

例6 设 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $\sigma_n(n,k+1) \leqslant \sigma_n(n,k)$.

证明 我们用数学归纳法证之. 假设命题对于 $n-1(n \geqslant 3)$ 成立.

不妨假定 $k \geqslant 2$，设

$$f(a) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \Big(\prod_{j=1}^{k} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k}} - \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big(\prod_{j=1}^{k+1} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k+1}}$$

在 D_1 内，我们有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1} = \frac{1}{k}\binom{n}{k}^{-1} a_1^{\frac{1}{k}-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} a_1^{\frac{1}{k+1}-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k+1}} =$$

$$\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}^{-1} a_1^{\frac{1}{k}-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k} a_{i_j}^{\frac{k-1}{k}}\Big)^{\frac{1}{k-1}} - \frac{1}{k+1} a_1^{\frac{1}{k+1}-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k+1}} \geqslant$$

$$\frac{1}{n}\binom{n-1}{k}^{-1} a_1^{\frac{1}{k}-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}^{\frac{k-1}{k}}\Big)^{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} a_1^{\frac{1}{k+1}-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k+1}} =$$

$$\frac{1}{n}\binom{n-1}{k}^{-1} a_1^{\frac{1}{k+1}-1} \Big\{\sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big[\prod_{j=2}^{k+1} \big(a_1^{\frac{1}{k^2-1}} a_{i_j}\big)\Big]^{\frac{k-1}{k^2}} - \sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big(\prod_{j=2}^{k+1} a_{i_j}\Big)^{\frac{1}{k+1}}\Big\} > \frac{1}{n}\binom{n-1}{k}^{-1} a_1^{\frac{1}{k+1}-1} \cdot$$

$$\Big\{\sum_{2 \leqslant i_2 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n} \Big[\prod_{j=2}^{k+1} \big(a_{i_j}^{\frac{1}{k^2-1}} a_{i_j}\big)\Big]^{\frac{k-1}{k^2}} -$$

$$\sum_{2\le i_2<\cdots<i_{k+1}\le n}\left(\prod_{j=2}^{k+1}a_{i_j}\right)^{\frac{1}{k+1}}\}=0$$

由推论 1 知 $f(a)\geqslant f(\bar{a}_{\min})=0$,即知命题得证.

例 7 Sierpinski 不等式:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}\right)^{n-1}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}\qquad(1)$$

证明 对于 $n=2$,易证命题成立,下设 $n=3$.

设 $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\ln a_i-\ln\sum_{i=1}^{n}a_i-(n-1)(\ln n-\ln\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1})-\ln n$ 在 D_1 内,我们有

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_i}-(n-1)\frac{1}{a_1^2\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}=\frac{1}{a_1\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}\left[\sum_{i=2}^{n}a_i\sum_{i=2}^{n}a_i^{-1}-(n-1)-(n-2)\frac{\sum_{i=2}^{n}a_i}{a_1}\right]$$

由 Cauchy 不等式及 D_1 的定义知

$$\frac{\partial f(a)}{\partial a_1}>\frac{1}{a_1\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}\left[(n-1)^2-(n-1)-(n-2)\frac{\sum_{i=2}^{n}a_i}{\frac{\sum_{i=2}^{n}a_i}{(n-1)}}\right]=0$$

由推论1知 $f(a)\geqslant f(\bar{a}_{\min})=0$,即知式(1)的左式成立.

设 $g(a)=(n-1)(\ln\sum_{i=1}^{n}a_i-\ln n)-\ln\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}-\sum_{i=1}^{n}\ln a_i+\ln n$,则

$$\frac{\partial g(a)}{\partial a_n}=(n-1)\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\frac{1}{a_n^2\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}\left[n-1+(n-2)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_n}{a_i}-\sum_{i=1}^{n-1}a_i\sum_{i=1}^{n-1}a_i^{-1}\right]$$

设 $D_2=\{a\in\mathbf{R}_{++}^n\,|a_n=\min_{1\le k\le n}\{a_k\}<\max_{1\le k\le n}\{a_k\}\}$,在 D_2 内,由 Cauchy 不等式知

$$\frac{\partial g(a(n))}{\partial a_n}<\frac{1}{a_n\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}a_i^{-1}}[n-1+(n-2)(n-1)-(n-1)^2]=0$$

由推论 2 知 $f(a(n))\geqslant f(\bar{a}_{\max})=0$,其中 $\bar{a}_{\max}=\{a_{\max},a_{\max},\cdots,a_{\max}\}$,即知式(1)的右式成立.

同理,我们还可证明如下 FanKy 不等式或 FanKy 型不等式,详细过程在此略.

例8 (FanKy不等式) 设 $0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$, $k=1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}a_k}{(\sum_{k=1}^{n}a_k)^n}\leqslant\frac{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)}{[\sum_{k=1}^{n}(1-a_k)]^n}$$

例9 $$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n+\sum_{k=1}^{n}a_k}\geqslant\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_i}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(1+a_i)}}.$$

例 10 若 $a_k>1$, $k=1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_i}}{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(a_i-1)}}\geqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}a_k-n}$$

例 11 若 $q_k>0$, $0\leqslant a_k<\frac{1}{2}$, $k=1,2,\cdots,n$, $\sum_{k=1}^{n}q_k=1$,则

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}}{\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)^{q_k}}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}q_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}q_k(1-a_k)}$$

参考文献

[1] 张小明,褚玉明. 也谈 Carleman 不等式的加强[J]. 不等式研究通讯,2007,15(4):373-378.

[2] 张小明. 再谈最值压缩定理的应用[J]. 不等式研究通讯,2007,14(4):421-426.

[3] 张小明. 最值单调性定理应用例举[J]. 不等式研

究通讯,2008,15(2):239-244.

[4] 张小明,褚玉明. 从新的角度研究有限项 Hilbert 不等式[J]. 不等式研究通讯,2008,15:53-64.

[5] 张小明,褚玉明. 二个有限项 Hilbert 不等式的加强[J]. 不等式研究通讯,2008,15(2):176-184.

[6] 张小明. 二个猜想与二个结果[J]. 不等式研究通讯,2008,15(3):347-351.

[7] 张小明. 最值单调性定理应用再例举[J]. 不等式研究通讯,2008,15(3):354-359.

[8] 张小明,褚玉明. 最值定位定理和 Carleman 不等式的加强[J]. 不等式研究通讯,2008,15(3):245-250.

[9] 张小明, 褚玉明. Carleman 不等式下界的改进[J]. 不等式研究通讯,2008,15(3):262-266.

[10] 张小明,褚玉明. 有限项 Hardy 不等式的有条件加强[J]. 不等式研究通讯,2008,15(3):299-307.

[11] 陈计,王振. 一个分析不等式的证明[J]. 宁波大学学报,1992(2):12-14.

[12] 匡继昌. 常用不等式[M]. 3 版. 济南:山东科学技术出版社,2004.

[13] SMITRINOVIC D,EPECARIC J,FINK A M. Classical and new inequalities in analysis [M]. The Netherlands: Kluwer Publishers,1993.

作者简介

张小明,男,硕士,汉族,党员,浙江广播电视大学海宁学院副教授,科研督导处主任,澳大利亚不等式研究小组成员,中国不等式研究小组成员,《不等式研究通讯》(内部刊物)编委,第四届全国不等式学术年会学术委员会成员兼秘书长;主要研究方向为:分析不等式和泛函微分方程;在国内公开发表论文30篇,在国外发表论文15篇,其中4篇发表在SCI收录源刊上;著有《几何凸函数》和《解析不等式新论》,共53万字;曾主持研究省教育厅和省电大课题3个,中央电大课题1个;先后被评为浙江电大优秀教师、嘉兴电大学科带头人、海宁市学科带头人;科研成果曾获浙江广播电视大学教学科研优秀成果二等奖(2次)、嘉兴市教育教学优秀成果一等奖、海宁市自然科学成果二等奖(2次).

Pythagoras 完全比例的推广研究

李　明[1]　富明远[2]

(1. 中国医科大学数学教研室,辽宁　沈阳　110001;

2. 福建省泉州市现代中学,福建　泉州　362000)

摘　要: 运用类比思想试着将 Pythagoras 完全比例从二元推广至一般的 n 元($n \geq 2$),提出了"n 元平均完全比例"的概念,并运用归纳法对"n 元平均完全比例"成立的充要条件进行了研究. 最后,定义了更一般的"n 元 γ 次幂平均完全比例",并指出它成立的条件和"n 元平均完全比例"成立的条件一致.

关键词: 完全比例　推广　n 元平均　充要条件　幂平均

1. 问题的提出

若 a,b 为两正数,其算术平均 $A = \frac{a+b}{2}$,几何平均 $G = \sqrt{ab}$,调和平均 $H = \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}}$,则这三个两元平均恒满足 $\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$,该式被 Pythagoras 学派称为完全比例[1].

一般的,若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n(n \geq 2)$ 个正数,其算术平均 $A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,几何平均 $G_n = (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$,调和平均 $H_n = \frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$,我们称 $\frac{A_n}{G_n} = \frac{G_n}{H_n}$ 为由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成的"n 元平均完全比例". 作为 Pythagoras 完全比例的推广,当 $n=2$ 时它恒成立;而当 $n \geq 3$ 时,它成立的充要条件是什么呢?下文将给出此问题的部分答案.

2. "三元和四元平均完全比例"成立的充要条件定理

我们研究发现"三元平均完全比例"成立的充要条件可归结为如下的定理:

定理 1　由三个正数 a_1,a_2,a_3 生成的"三元平均完全比例" $\frac{A_3}{G_3} = \frac{G_3}{H_3}$ 成立,当且仅当 a_1,a_2,a_3 能够按照某个顺序排成等比数列.

证明

$$\frac{A_3}{G_3} = \frac{G_3}{H_3} \Leftrightarrow A_3H_3 = G_3^2 \Leftrightarrow$$

$$(a_1+a_2+a_3)^3a_1a_2a_3 =$$

$$(a_2a_3+a_1a_3+a_1a_2)^3 \Leftrightarrow$$

$$[(a_1+a_2)+a_3]^3a_1a_2a_3 =$$

$$[(a_1+a_2)a_3+a_1a_2]^3 \Leftrightarrow$$

$$(a_1+a_2)^3a_1a_2a_3+3(a_1+a_2)a_1a_2a_3^3+a_1a_2a_3^4 =$$

$$(a_1+a_2)^3a_3^3+3(a_1+a_2)a_1^2a_2^2a_3+a_1^3a_2^3 \Leftrightarrow$$

$$[(a_1+a_2)^3a_1a_2a_3-(a_1+a_2)^3a_3^3]+$$

$$[3(a_1+a_2)a_1a_2a_3^3-3(a_1+a_2)a_1^2a_2^2a_3]+$$

$$[a_1a_2a_3^4-a_1^3a_2^3] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_1+a_2)^3(a_3a_1a_2-a_3^2)+$$

$$3(a_1+a_2)a_1a_2a_3(a_3^2-a_1a_2)+$$

$$a_1a_2(a_3^2+a_1a_2)(a_3^2-a_1a_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[(a_1+a_2)^3a_3-3(a_1+a_2)a_1a_2a_3-$$

$$a_1a_2(a_3^2+a_1a_2)](a_1a_2-a_3^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[(a_1^3a_3-a_1a_2a_3^2)+(a_2^3a_3-$$

$$a_1^2a_2^2)](a_1a_2-a_3^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a_1^2-a_2a_3)(a_2^2-a_1a_3)(a_3^2-a_1a_2) = 0 \Leftrightarrow$$

a_1,a_2,a_3 能够按照某个顺序排成等比数列.

类似地,我们也得到了"四元平均完全比例"成立的充要条件,归结为如下的定理:

定理 2　由四个正数 a_1,a_2,a_3,a_4 生成的"四元平均完全比例" $\frac{A_4}{G_4} = \frac{G_4}{H_4}$ 成立,当且仅当 a_1,a_2,a_3,a_4 中有两个数的乘积等于另两个数的乘积.

证明　$\frac{A_4}{G_4} = \frac{G_4}{H_4} \Leftrightarrow$

$$A_4H_4 = G_4^2 \Leftrightarrow$$

$$(a_1+a_2+a_3+a_4)^2a_1a_2a_3a_4 =$$

$(a_2a_3a_4+a_1a_3a_4+a_1a_2a_4+a_1a_2a_3)^2 \Leftrightarrow$

$[(a_1+a_2)+(a_3+a_4)]^2a_1a_2a_3a_4=$

$[(a_1+a_2)a_3a_4+(a_3+a_4)a_1a_2]^2 \Leftrightarrow$

$(a_1+a_2)^2a_1a_2a_3a_4+(a_3+a_4)^2a_1a_2a_3a_4=$

$(a_1+a_2)^2a_3^2a_4^2+(a_3+a_4)^2a_1^2a_2^2 \Leftrightarrow$

$[(a_1+a_2)^2a_1a_2a_3a_4-(a_1+a_2)^2a_3^2a_4^2]+$

$[(a_3+a_4)^2a_1a_2a_3a_4-(a_3+a_4)^2a_1^2a_2^2]=0 \Leftrightarrow$

$(a_1+a_2)^2a_3a_4(a_1a_2-a_3a_4)+$

$(a_3+a_4)^2a_1a_2(a_3a_4-a_1a_2)=0 \Leftrightarrow$

$[(a_1+a_2)^2a_3a_4-(a_3+a_4)^2a_1a_2](a_1a_2-a_3a_4)=0 \Leftrightarrow$

$[(a_1^2a_3a_4-a_3^2a_1a_2)+$

$(a_2^2a_3a_4-a_4^2a_1a_2)](a_1a_2-a_3a_4)=0 \Leftrightarrow$

$(a_1a_4-a_2a_3)(a_1a_3-a_2a_4)(a_1a_2-a_3a_4)=0 \Leftrightarrow$

a_1,a_2,a_3,a_4 中有两个数的乘积等于另两个数的乘积.

3."$n(n\geq 5)$ 元平均完全比例"成立的充分条件证明及必要条件探究

由定理1和定理2,通过类比和归纳,我们给出如下猜测:

猜测1:由 $n(n\geq 5)$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成的"n 元平均完全比例"成立,当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 单调重排后,所有对称项之积均相等.

下面来证明猜测1给出的条件是"n 元平均完全比例"成立的充分条件.

证明 设 $a_{(1)},a_{(2)},\cdots,a_{(n)}$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的单调重排.

(1) 当 n 为偶数时,由于 $a_{(1)}a_{(n)}=a_{(2)}a_{(n-1)}=\cdots=a_{(\frac{n}{2})}a_{(\frac{n}{2}+1)}$,于是

$$A_nH_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=$$

$$\frac{a_{(1)}+a_{(2)}+\cdots+a_{(n)}}{(a_{(1)}^{-1}+a_{(n)}^{-1})+(a_{(2)}^{-1}+a_{(n-1)}^{-1})+\cdots+(a_{(\frac{n}{2})}^{-1}+a_{(\frac{n}{2}+1)}^{-1})}=$$

$a_{(1)}a_{(n)}$

又 $G_n^2=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{2}{n}}=[(a_{(1)}a_{(n)})\cdot(a_{(2)}a_{(n-1)})\cdots(a_{(\frac{n}{2})}a_{(\frac{n}{2}+1)})]^{\frac{2}{n}}=a_{(1)}a_{(n)}$, 于是 $A_nH_n=G_n^2$,即 $\frac{A_n}{G_n}=\frac{G_n}{H_n}$ 成立.

(2) 当 n 为奇数时,由于 $a_{(1)}a_{(n)}=a_{(2)}a_{(n-1)}=\cdots=a_{(\frac{n-1}{2})}a_{(\frac{n+3}{2})}=a_{(\frac{n+1}{2})}^2$. 于是

$$A_nH_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}=$$

$$\frac{a_{(1)}+a_{(2)}+\cdots+a_{(n)}}{(a_{(1)}^{-1}+a_{(n)}^{-1})+(a_{(2)}^{-1}+a_{(n-1)}^{-1})+\cdots+(a_{(\frac{n-1}{2})}^{-1}+a_{(\frac{n+3}{2})}^{-1})+a_{(\frac{n+1}{2})}^{-1}}=$$

$a_{(1)}a_{(n)}$

又 $G_n^2=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{2}{n}}=[(a_{(1)}a_{(n)})\cdot(a_{(2)}a_{(n-1)})\cdots(a_{(\frac{n-1}{2})}a_{(\frac{n+3}{2})})a_{(\frac{n+1}{2})}]^{\frac{2}{n}}=a_{(1)}a_{(n)}$,于是 $A_nH_n=G_n^2$,即 $\frac{A_n}{G_n}=\frac{G_n}{H_n}$ 成立.

综合(1)、(2),我们便证实了"$n(n\geq 5)$ 元平均完全比例"成立的充分条件.至于该充分条件是否为"$n(n\geq 5)$ 元平均完全比例"成立的必要条件,还有待进一步研究.

4."n 元 γ 次幂平均完全比例"成立的充要条件探究

事实上,对于 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的算术平均 A_n、几何平均 G_n 和调和平均 H_n,我们有一个统一且更加广泛的平均概念,即"n 元 γ 次幂平均"[2],记为

$$M_{n,\gamma}=\begin{cases}\left(\frac{a_1^{\gamma}+a_2^{\gamma}+\cdots+a_n^{\gamma}}{n}\right)^{\frac{1}{\gamma}},(n\geq 2,\gamma\in\mathbf{R},\gamma\neq 0)\\(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}},(n\geq 2,\gamma=0)\end{cases}$$

显然,Pythagoras 完全比例就是 $\frac{M_{2,1}}{M_{2,0}}=\frac{M_{2,0}}{M_{2,-1}}$,而"$n$ 元平均完全比例"就是 $\frac{M_{n,1}}{M_{n,0}}=\frac{M_{n,0}}{M_{n,-1}}$,于是我们可以定义更一般的"$n$ 元 γ 次幂平均完全比例"为:若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $n(n\geq 2)$ 个正数,则我们称 $\frac{M_{n,\gamma}}{M_{n,0}}=\frac{M_{n,0}}{M_{n,-\gamma}}$ 为由 $n(n\geq 2)$ 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 生成的"n 元 γ 次幂平均完全比例".这个更一般的完全比例成立的充要条件如何呢?实际上,稍加推理就会发现其成立的充要条件与"n 元平均完全比例"成立的充要条件是一致的,即:

(1)$n=2$ 时,"2 元 γ 次幂平均完全比例"恒成立.

(2)$n=3$ 时,"3 元 γ 次幂平均完全比例"成立,当且仅当生成此完全比例的三个正数能够按照某个顺序排成等比数列.

(3)$n=4$ 时,"4 元 γ 次幂平均完全比例"成立,当且仅当生成此完全比例的四个正数中有两个数的

乘积等于另两个数的乘积.

(4)$n \geq 5$ 时,"n 元 γ 次幂平均完全比例"成立的充分条件是:生成此完全比例的 n 个正数单调重排后,对称项之积相等. 至于此充分条件能否成为"n 元 γ 次幂平均完全比例"成立的必要条件,还有待于猜测 1 的解决.

参考文献

[1] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 张理京,张锦炎,江泽涵,译. 上海:上海科学技术出版社,2002.

[2] 靳平. 数学的 100 个基本问题[M]. 太原:山西科学技术出版社,2004.

作者简介

李明,男,1981 年 9 月生,辽宁沈阳人,辽宁大学应用数学硕士毕业,中国医科大学数学教研室讲师,校级精品课《医学高等数学》授课教师,中国数学会会员,中国不等式研究小组成员,《不等式研究通讯》责任编辑,全国初等数学研究会理事,曾获 1999 年"全国高中数学联合竞赛二等奖",曾获"辽宁大学 2004 届本科优秀毕业论文一等奖",已在《数学通报》、《数学通讯》及《不等式研究通讯》等期刊发表论文 12 篇. 研究方向:分析不等式、几何不等式.

富明远,男,1982 年 2 月生,福建泉州人,泉州市现代中学数学教师,全国初等数学研究会会员,曾获"全国大学生数学建模竞赛省一等奖",在《不等式研究通讯》上发表论文 2 篇. 研究方向:代数不等式.

一个优美的自然数阵

杨　之[1]　王雪芹[2]

(1. 天津宝坻区教研室，天津　301800；
2. 北京师大二附中，北京　100088)

1. 问题的提出

近年在中高考、数学竞赛舞台上，常有数阵类题目粉墨亮相，如下面这个由自然数列排成的数阵，就是其中的一个：

$$\{n_{ij}\}=\begin{Bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \cdots \\ 2 & 3 & 8 & 15 & 24 & 35 & 48 & \cdots \\ 5 & 6 & 7 & 14 & 23 & 34 & 47 & \cdots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 22 & 33 & 46 & \cdots \\ 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 32 & 45 & \cdots \\ 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 44 & \cdots \\ 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{Bmatrix} \quad (1)$$

它从 1 开始，然后是 2,3,4;5,6,7,8,9;10,11,…,16;… 像旋风一样，按逆时针旋转而成. 从排列结果看，它是个常规的矩形数阵 $\{n_{ij}\}$（n_{ij} 表第 i 行、第 j 列交叉处的元素）；从生成过程看，它是个螺旋数阵 $[C_{kl}]$（C_{kl} 表第 k 层中左数第 l 个元素，如 $C_{4,1}=10$，$C_{4,5}=22$）.

此数阵看似平淡，实际上却是蹊跷得很哪！你看：它的第 1 行是平方数列，第 1 列

1,2,5,10,17,26,…

则为二阶等差数列. 主对角线上好像素数特别多，且它又是一条分水岭，两边风光俱佳但各显特色. 但在“解题”中，又如何把握它呢？妙计是：求出通项公式，即会规范简洁，如快刀斩麻.

2. 通项公式

由于数阵是逐层生成的，层通项 C_{kl} 的解析式易求.

(1) 层通项公式

设第 k 层有 m_k 项，则由式(1) 知

$$m_k=k^2-(k-1)^2=k^2-(k^2-2k+1)$$

即

$$m_k=2k-1 \quad (2)$$

由于 $C_{k,l}=C(k,l)$ 表示第 k 层的第 l 项，由(1) 知，前 $(k-1)$ 层共 $(k-1)^2$ 项，即 $C(k-1,m_{k-1})=(k-1)^2$

所以 $C(k,l)=C(k-1,m_{k-1})+l=(k-1)^2+l$

即 $C_{k,l}=(k-1)^2+l \quad (l=1,2,\cdots,m_k)$

于是有：

定理 1　数阵(1) 即 $\{C_{kl}\}$ 的层通项公式为

$$C_{kl}=(k-1)^2+l(1\leqslant l\leqslant 2k-1,k=1,2,3,\cdots) \quad (3)$$

(2) 直通项公式

先求直通项 n_{ij} 与层通项 C_{kl} 间的转换关系. 设 $n_{ij}=C_{kl}$. 仔细观察式(1) 可看出，主对角线数列（式(1) 中虚线贯穿的）是一条分界，在它本身或它下面 $(j\leqslant i)$ 的 n_{ij} 就是第 i 层第 j 个数（如 $n_{5,4}=20$ 就是第 5 层第 4 个数 $C_{5,4}$；$n_{4,4}=13=C_{4,4}$）；在它上面（即 $j>i$）的 n_{ij} 实际上是第 j 层的第 $j+j-i$ 个数 C_{2j-i}（如 $n_{3,5}=23$ 为第 5 层第 $5+(5-3)=7$ 个数 $C_{5,7}$），也就是

$$n_{ij}=C_{kl}=\begin{cases}C_{ij} & (i\geqslant j)\\ C_{j,2j-i} & (i\leqslant j)\end{cases} \quad (4)$$

（因为 $i=j$ 时，$2j-i=j$），它的逆公式为

$$C_{k,l}=\begin{cases}n_{kl} & (k\geqslant l)\\ n_{2k-l,k} & (k\leqslant l)\end{cases} \quad (5)$$

式(4) 和(5) 是十分重要的数阵直—层通项转换公式. 把式(3) 代入式(4)

$$n_{ij}=\begin{cases}C_{ij}=(i-1)^2+j & (i\geqslant j)\\ C_{j,2j-i}=(j-1)^2+2j-i=j^2-i+1 & (i\leqslant j)\end{cases}$$

从而有：

定理 2　数阵(1) 即 $\{n_{ij}\}$ 的直通项公式为

$$n_{ij}=\begin{cases}(i-1)^2+j & (1\leqslant j\leqslant i)\\ j^2-i+1 & (1\leqslant i\leqslant j)\end{cases} \quad (6)$$

3. 若干性质

定理3 数阵$\{n_{ij}\}$的首行为平方数列.

事实上,由式(6)有

$$n_{1j}=j^2-1+1=j^2\quad(j=1,2,3,\cdots)$$

定理4 主对角线及与其平行的斜线上的数列,均为二阶等差数列,二阶差为2.

证明 主对角线及与主对角线平行的斜线上的数列的特点是两个下标每次都增1,如:

主对角线:$n_i=n_{ii}=i^2-i+1$

主对角线上方紧邻:$n_i=n_{i,i+1}=(i+1)^2-i+1$

主对角线下方紧邻:$n_i=n_{i+1,i}=i^2+i$

总而言之,$n_i=n_{i+k,i+2}$,由式(6)知,它们都是i的二次式,二阶差分都是常数2.

至于主对角线上素数较多,则是个假象,因为$n_i=i^2-i+1$前50项中,只有17个素数.

应用通项公式易证:

定理5 以主对角线上一元素为首项的右上部的行数列、左下部的列数列为二阶等差数列,二阶差为2;右上部列数列、左下部行数列为(一阶)等差数列,公差为±1.

定理6 以主对角线为界,伸向右上方或左下方"垂直于"主对角线的斜线上的数列,均为二阶等差数列,二阶差都是2.

定理7 第k层数列各项和$C_k=(2k-1)(k^2-k+1)$.

证明 应用公式(3),有

$$C_k=\sum_{l=1}^{n_k}C_{kl}=\sum_{l=1}^{2k-1}[(k-1)^2+l]=$$
$$(2k-1)(k-1)^2+[1+2+\cdots+(2k-1)]=$$
$$(2k-1)(k-1)^2+\frac{1}{2}(2k-1)(1+2k-1)=$$
$$(2k-1)(k^2-k+1)$$

定理8 如果把数阵(1)中的自然数n看作某一数列$\{b_n\}$的下标,而$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=f(n)$,则以b_n为元素排成的数阵(1)的通项公式分别为$N_{ij}=f(n_{ij})$和$C_{kl}=f(C_{kl})$.

4. 例题

例1 (2003,湖南数赛题) 自然数按表(1)规律排列,则上起2 003行、左起2 002列的数为( )

A. $2\,002^2$ B. $2\,003^2$

C. $2\,002+2\,003$ D. $2\,002\times2\,003$

解 应用公式(6):$i=2\,003$, $j=2\,002$, $i>j$,有

$$n_{2\,003,2\,002}=(2\,003-1)^2+2\,002=2\,002\times2\,003$$

选D.

例2 (《数学教学》2006.8,李春雷文中题) 自然数按表(1)排列,问:(1)数200在何位置(几行几列)?(2)n行、m列交叉处的数.(3)主对角线数列通项公式.

解 (1)设$n_{ij}=200$.

ⅰ)若$i\geqslant j$,有$(i-1)^2+j=200=196+4=(15-1)^2+4$, $i=15$, $j=4$即$n_{15,4}=200$.

ⅱ)若$i<j$,由唯一性,不必讨论.

(2)通项记为$a_{m,n}$,由公式(7)知

$$a_{m,n}=\begin{cases}(m-1)^2+n & (m\geqslant n)\\ n^2-m+1 & (m\leqslant n)\end{cases}$$

(3)$a_{m,m}=m^2-m+1$.

参考文献

[1] 杨之. 初等数学研究的问题与课题[M]. 长沙:湖南教育出版社,1993.

一类优美的自然数方幂和不等式

杨志明

（广东省广东广雅中学，广东　广州　510160）

摘　要：本文将2004年上海市高中数学竞赛试题的有关一道自然数方幂和集合的二划分问题加以推广，并得到这类问题的同一构造等式和不等式．值得进一步研究的问题是自然数方幂和集合的三划分问题，乃至自然数方幂和集合的 $n(n \geq 3)$ 划分问题．

关键词：自然数方幂和集合的 n 划分

2004年上海市高中数学竞赛有一道试题：

集合 $M = \{1^2, 2^2, \cdots, 1\,000^2\}$．问：能否把集合 M 分拆成2个非空子集 A、B 同时满足：

(1) $A \cup B = M, A \cap B = \varnothing$；

(2) 集合 A 与集合 B 的元素和相等．

若可能，指出具体的分法，并给出证明；若不能，说明理由．

文[1]得到了一系列优美的恒等式：

$1 + 4 = 2 + 3$

$1 + 4 + 6 + 7 = 2 + 3 + 5 + 8$

$1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$

$(k+1)^2 + (k+4)^2 + (k+6)^2 + (k+7)^2 = (k+2)^2 + (k+3)^2 + (k+5)^2 + (k+8)^2$

$$\begin{cases} 1+4+6+7+10+11+13+16 = \\ \quad 2+3+5+8+9+12+14+15 \\ 1^2+4^2+6^2+7^2+10^2+11^2+13^2+16^2 = \\ \quad 2^2+3^2+5^2+8^2+9^2+12^2+14^2+15^2 \\ 1^3+4^3+6^3+7^3+10^3+11^3+13^3+16^3 = \\ \quad 2^3+3^3+5^3+8^3+9^3+12^3+14^3+15^3 \end{cases}$$

$(m+1)^3 + (m+4)^3 + (m+6)^3 + (m+7)^3 + (m+10)^3 + (m+11)^3 + (m+13)^3 + (m+16)^3 = (m+2)^3 + (m+3)^3 + (m+5)^3 + (m+8)^3 + (m+9)^3 + (m+12)^3 + (m+14)^3 + (m+15)^3$

$A = \{1,4,6,7,10,11,13,16,18,19,21,24,25,28,30,31\}$

$B = \{2,3,5,8,9,12,14,15,17,20,22,23,26,27,29,32\}$

它们元素可以构成下面奇妙的"等幂和"式：

$$\begin{cases} 1+4+6+\cdots+30+31 = 2+3+5+\cdots+29+32 \\ 1^2+4^2+6^2+\cdots+30^2+31^2 = 2^2+3^2+5^2+\cdots+29^2+32^2 \\ 1^3+4^3+6^3+\cdots+30^3+31^3 = 2^3+3^3+5^3+\cdots+29^3+32^3 \\ 1^4+4^4+6^4+\cdots+30^4+31^4 = 2^4+3^4+5^4+\cdots+29^4+32^4 \end{cases}$$

$(m+1)^4 + (m+4)^4 + (m+6)^4 + \cdots + (m+30)^4 + (m+31)^4 = (m+2)^4 + (m+3)^4 + (m+5)^4 + \cdots + (m+29)^4 + (m+32)^4$

文[2]得到更多更高次的优美"等幂和"式，设

$A = \{1,4,6,7,10,11,13,16,18,19,21,24,25,28,30,31,34,35,37,40,41,44,46,47,49,52,54,55,58,59,61,64\}$

$B = \{2,3,5,8,9,12,14,15,17,20,22,23,26,27,29,32,33,36,38,39,42,43,45,48,50,51,53,56,57,60,62,63\}$

它们元素可以构成下面奇妙的"等幂和"式：

$$\begin{cases} 1+4+6+\cdots+61+64 = 2+3+5+\cdots+62+63 \\ 1^2+4^2+6^2+\cdots+61^2+64^2 = 2^2+3^2+5^2+\cdots+62^2+63^2 \\ 1^3+4^3+6^3+\cdots+61^3+64^3 = 2^3+3^3+5^3+\cdots+62^3+63^3 \\ 1^4+4^4+6^4+\cdots+61^4+64^4 = 2^4+3^4+5^4+\cdots+62^4+63^4 \\ 1^5+4^5+6^5+\cdots+61^5+64^5 = 2^5+3^5+5^5+\cdots+62^5+63^5 \end{cases}$$

利用它可证明：$(m \in \mathbf{N})$

$(m+1)^5 + (m+4)^5 + (m+6)^5 + (m+7)^5 + (m+10)^5 + \cdots + (m+61)^5 + (m+64)^5 = (m+2)^5 + (m+3)^5 + (m+5)^5 + (m+8)^5 + (m+9)^5 + \cdots + (m+62)^5 + (m+63)^5$

约定 $k, p \in \mathbf{N}^*$，记 $H_{2k-1} = [4(k-1)+1]^p + [4(k-1)+4]^p$，$H_{2k} = [4(k-1)+2]^p + [4(k-1)+3]^p$．

定理1 $H_{2k-1} \geqslant H_{2k}$.

当且仅当 $p = 1$ 时等号成立.

证明 先证明 $H_1 \geqslant H_2$,即当 $k = 1$ 时,有 $1^p + 4^p \geqslant 2^p + 3^p$.

当 $p = 1$ 时,$1 + 4 = 2 + 3$.

当 $p = 2$ 时,$1^2 + 4^2 > 2^2 + 3^2$.

当 $p \geqslant 2$ 时,$1^3 + 4^3 \geqslant 2^3 + 3^3$.

当 $p \geqslant 4$ 时,$(1^p + 4^p) - (2^p + 3^p) =$

$$\frac{1}{2^p}[(5-3)^p + (5+3)^p - (5-1)^p - (5+1)^p] =$$

$$\frac{1}{2^p}[2(C_p^0 5^p + C_p^2 5^{p-2} \cdot 3^2 + C_p^4 5^{p-4} \cdot 3^4 + \cdots) -$$

$$2(C_p^0 5^p + C_p^2 5^{p-2} \cdot 1^2 + C_p^4 5^{p-4} \cdot 1^4 + \cdots)] =$$

$$\frac{1}{2^p}[C_p^2 5^{p-2}(3^2 - 1^2) + C_p^4 5^{p-4}(3^4 - 1^4) + \cdots] > 0$$

综上可知,$1^p + 4^p \geqslant 2^p + 3^p$.

当 $k > 1$ 时,

$$H_{2k-1} - H_{2k} = \{[4(k-1)+1]^p + [4(k-1)+4]^p\} - \{[4(k-1)+2]^p + [4(k-1)+3]^p\} =$$

$$C_p^1[4(k-1)]^{p-1}(1^1 + 4^1 - 2^1 - 3^1) +$$

$$C_p^2[4(k-1)]^{p-2}(1^2 + 4^2 - 2^2 - 3^2) + \cdots +$$

$$C_p^p(1^p + 4^p - 2^p - 3^p) \geqslant 0$$

故原不等式成立.

从其证明过程,不难看出,定理1 还可以推广为:

推广1 若 $p \in \mathbf{N}^*, m \geqslant 0$,则

$$T_{22}(m) = (m+1)^p + (m+4)^p - (m+2)^p - (m+3)^p \geqslant 0$$

当且仅当 $p = 1$ 时等号成立.

对 $T_{22}(m)$ 关于 m 求导数,则

$$T'_{22}(m) = p[(m+1)^{p-1} + (m+4)^{p-1} - (m+2)^{p-1} - (m+3)^{p-1}] \geqslant 0$$

所以 $T_{22}(m)$ 为关于 m 的单调增函数,从而

$$T_{22}(4) \geqslant T_{22}(0)$$

即 $5^p + 8^p - 6^p - 7^p \geqslant 1^p + 4^p - 2^p - 3^p$,即

$$5^p + 8^p + 2^p + 3^p \geqslant 1^p + 4^p + 6^p + 7^p$$

由此得到:

定理2 $H_2 + H_3 \geqslant H_1 + H_4$.

当且仅当 $p \leqslant 2$ 时等号成立.

仿照定理1 的证明,利用二项式定理及定理2,可将定理2 推广为:

推广2 若 $p \in \mathbf{N}^*, m \geqslant 0$,则

$$T_{23}(m) = (m+2)^p + (m+3)^p + (m+5)^p + (m+8)^p - (m+1)^p - (m+4)^p - (m+6)^p - (m+7)^p \geqslant 0$$

当且仅当 $p \leqslant 2$ 时等号成立.

同理可证明 $T_{23}(m)$ 为关于 m 的单调增函数,从而

$$T_{23}(8) \geqslant T_{23}(0)$$

即

$$10^p + 11^p + 13^p + 16^p - (9^p + 12^p + 14^p + 15^p) \geqslant 5^p + 8^p + 2^p + 3^p - (1^p + 4^p + 6^p + 7^p)$$

即

$$1^p + 4^p + 6^p + 7^p + 10^p + 11^p + 13^p + 16^p \geqslant 2^p + 3^p + 5^p + 8^p + 9^p + 12^p + 14^p + 15^p$$

由此得到:

定理3 $H_1 + H_4 + H_6 + H_7 \geqslant H_2 + H_3 + H_5 + H_8$.

当且仅当 $p \leqslant 3$ 时等号成立.

推广3 若 $p \in \mathbf{N}^*, m \geqslant 0$,则

$$T_{24}(m) = (m+1)^p + (m+4)^p + (m+6)^p + (m+7)^p + (m+10)^p + (m+11)^p + (m+13)^p + (m+16)^p - [(m+2)^p + (m+3)^p + (m+5)^p + (m+8)^p + (m+9)^p + (m+12)^p + (m+14)^p + (m+15)^p] \geqslant 0$$

当且仅当 $p \leqslant 3$ 时等号成立.

定理4 $H_1 + H_4 + H_6 + H_7 + H_{10} + H_{11} + H_{13} + H_{16} \geqslant H_2 + H_3 + H_5 + H_8 + H_9 + H_{12} + H_{14} + H_{15}$.

当且仅当 $p \leqslant 4$ 时等号成立.

推广4 若 $p \in \mathbf{N}^*, m \geqslant 0$,则

$$T_{24}(m) = [(m+2)^p + (m+3)^p + (m+5)^p + (m+8)^p + (m+9)^p + (m+12)^p + (m+14)^p + (m+15)^p] (m+17)^p + (m+20)^p + (m+22)^p + (m+23)^p + (m+26)^p + (m+27)^p + (m+29)^p + (m+32)^p] - [(m+1)^p + (m+4)^p + (m+6)^p + (m+7)^p + (m+10)^p + (m+11)^p + (m+13)^p + (m+16)^p + (m+18)^p + (m+19)^p + (m+21)^p + (m+24)^p + (m+25)^p + (m+28)^p + (m+30)^p + (m+31)^p] \geqslant 0$$

当且仅当 $p \leqslant 4$ 时等号成立.

更一般地,有:

命题1 若 $s, t, p \in \mathbf{N}^*, a_1^t + a_2^t + \cdots + a_{2s}^t \geqslant$

$b_1^t+b_2^t+\cdots+b_{2^k}^t$（当且仅当 $s\leqslant t$ 时取等号），则

$b_1^p+b_2^p+\cdots+b_{2^k}^p+(a_1+2^{k+1})^p+$
$(a_2+2^{k+1})^p+\cdots+(a_{2^k}+2^{k+1})^p\geqslant$
$a_1^p+a_2^p+\cdots+a_{2^k}^p+(b_1+2^{k+1})^p+$
$(b_2+2^{k+1})^p+\cdots+(b_{2^k}+2^{k+1})^p$

当且仅当 $p\leqslant t+1$ 时取等号.

证明

$b_1^p+b_2^p+\cdots+b_{2^k}^p+(a_1+2^{k+1})^p+$
$(a_2+2^{k+1})^p+\cdots+(a_{2^k}+2^{k+1})^p-$
$[a_1^p+a_2^p+\cdots+a_{2^k}^p+(b_1+2^{k+1})^p+$
$(b_2+2^{k+1})^p+\cdots+(b_{2^k}+2^{k+1})^p]=$
$\sum_{r=1}^{p-1}C_p^r(2^{k+1})^r[(a_1^{p-r}+a_2^{p-r}+\cdots+a_{2^k}^{p-r})-$
$(b_1^{p-r}+b_2^{p-r}+\cdots+b_{2^k}^{p-r})]\geqslant 0$

证毕.

推论 若 $a_1=1,a_2=4,b_1=2,b_2=3,s,t,p\in\mathbf{N}^*$，$1^s+4^s\geqslant 2^s+3^s$（当且仅当 $s\leqslant 2$ 时取等号），则 $1^p+4^p+6^p+7^p\geqslant 2^p+3^p+5^p+8^p$（当且仅当 $p\leqslant 3$ 时取等号）.

此即定理 2 的推广.

命题 1 还可以进一步推广为：

命题 2 若 $s,t,p\in\mathbf{N}^*,k>0,a_1^s+a_2^s+\cdots+a_n^s\geqslant b_1^s+b_2^s+\cdots+b_n^s$（当且仅当 $s\leqslant t$ 时取等号），则

$b_1^p+b_2^p+\cdots+b_n^p+(a_1+k)^p+$
$(a_2+k)^p+\cdots+(a_{2^k}+k)^p\geqslant$
$a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p+(b_1+k)^p+$
$(b_2+k)^p+\cdots+(b_n+k)^p$

当且仅当 $p\leqslant t+1$ 时取等号.

证明

$b_1^p+b_2^p+\cdots+b_n^p+(a_1+k)^p+$
$(a_2+k)^p+\cdots+(a_n+k)^p-$
$[a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p+(b_1+k)^p+$
$(b_2+k)^p+\cdots+(b_n+k)^p]=$
$\sum_{r=1}^{p-1}C_p^rk^r[(a_1^{p-r}+a_2^{p-r}+\cdots+a_n^{p-r})-$
$(b_1^{p-r}+b_2^{p-r}+\cdots+b_n^{p-r})]\geqslant 0$

证毕.

关于自然数方幂和集合的三划分问题，文[3]、[4]得到了一些有趣的结论.例如：

(1) $(k+1)^2+(k+6)^2+(k+9)^2+$
$(k+10)^2+(k+14)^2+(k+17)^2=$
$(k+2)^2+(k+5)^2+(k+7)^2+$
$(k+12)^2+(k+15)^2+(k+16)^2=$
$(k+3)^2+(k+4)^2+(k+8)^2+$
$(k+11)^2+(k+13)^2+(k+18)^2$

(2) $13^2+10^2+2^2=12^2+8^2+$
$7^2+4^2=11^2+9^2+5^2+3^2+1^2$

(3) $22^2+19^2+17^2+11^2+3^2+1^2=$
$21^2+20^2+18^2+10^2=$
$16^2+15^2+14^2+13^2+12^2+$
$9^2+8^2+7^2+6^2+5^2+4^2+2^2$

(4) $26^2+23^2+22^2+18^2+17^2+2^2+1^2=$
$25^2+24^2+21^2+20^2+5^2=$
$19^2+17^2+16^2+15^2+14^2+$
$13^2+12^2+11^2+10^2+9^2+$
$8^2+7^2+6^2+4^2+3^2$

(5) $27^2+23^2+21^2+19^2+14^2+7^2+2^2+1^2=$
$26^2+25^2+22^2+21^2+10^2+5^2=$
$24^2+18^2+17^2+16^2+15^2+$
$13^2+12^2+11^2+9^2+8^2+6^2+4^2+3^2$

借助二项式定理，可将以上等式推广为：

推论 若 $p\in\mathbf{N}^*$，则

(1) $(k+2)^p+(k+5)^p+(k+7)^p+$
$(k+12)^p+(k+15)^p+(k+16)^p\leqslant$
$(k+1)^p+(k+6)^p+(k+9)^p+$
$(k+10)^p+(k+14)^p+(k+17)^p\leqslant$
$(k+3)^p+(k+4)^p+(k+8)^p+$
$(k+11)^p+(k+13)^p+(k+18)^p$

且 $(k+2)^p+(k+5)^p+(k+7)^p+$
$(k+12)^p+(k+15)^p+(k+16)^p\leqslant$
$(k+1)^p+(k+6)^p+(k+9)^p+$
$(k+10)^p+(k+14)^p+(k+17)^p\leqslant$
$(k+3)^p+(k+4)^p+(k+8)^p+$
$(k+11)^p+(k+13)^p+(k+18)^p(k>0)$

(2) $13^p+10^p+2^p\geqslant$
$12^p+8^p+7^p+4^p\geqslant$
$11^p+9^p+5^p+3^p+1^p$

(3) $22^p+19^p+17^p+11^p+3^p+1^p\geqslant$
$21^p+20^p+18^p+10^p\geqslant$
$16^p+15^p+14^p+13^p+12^p+$
$9^p+8^p+7^p+6^p+5^p+4^p+2^p$

(4) $26^s+23^s+22^s+$
$18^s+17^s+2^s+1^s \geq$
$25^s+24^s+21^s+20^s+5^s \geq$
$19^s+17^s+16^s+15^s+14^s+$
$13^s+12^s+11^s+10^s+9^s+$
$8^s+7^s+6^s+4^s+3^s$

(5) $27^s+23^s+21^s+19^s+$
$14^s+7^s+2^s+1^s \geq$
$26^s+25^s+22^s+21^s+10^s+5^s \geq$
$24^s+18^s+17^s+16^s+15^s+$
$13^s+12^s+11^s+9^s+$
$8^s+6^s+4^s+3^s$

以上不等式等号当且仅当 $s \leq 2$ 时成立.

利用命题2和二项式定理,不难将以上推论加以推广,这留给有兴趣的读者.

值得进一步研究的问题是自然数方幂和集合的三划分问题,乃至自然数方幂和集合的 $n(n \geq 3)$ 划分问题.

参考文献

[1] 甘超一. 谈自然数方幂集合的划分[J]. 中学数学,2006(3).

[2] 杨志明. 再谈自然数方幂集合的划分[J]. 中学数学,2006(12).

[3] 阴洪生. 平方数集合的一个三分拆问题[J]. 中学数学研究(广州),2007(12).

[4] 阴洪生. 平方数集合的一个三分拆问题[J]. 中等数学,2008(5).

作者简介

杨志明,1967年生,湖北麻城人. 中学高级教师,九三学社会员. 自2007年8月起任教于有120年历史的全国著名的广东广雅中学,兼数学竞赛小组组长. 曾任教于湖北省二十八所省重点中学之一的湖北省黄石二中14年. 全国初等数学研究理事会常务理事兼副秘书长. 现为《中学数学》编委,中学学科网特约编辑,武汉学海教科所编辑,中国不等式研究小组成员. 1993年毕业于湖北师范学院数学系数学教育专业(本科,理学学士),曾荣获第五届湖北省高师学生数学竞赛三等奖. 出席了第四、五、六届全国初等数学学术交流会,第二、三届全国不等式研究学术交流会. 荣获第一届"青年初等数学研究奖提名奖"(2003.8江西赣州)和第二届"青年初等数学研究奖"(2006.8湖北武汉). 荣获全国高中数学联合竞赛优秀教练员称号(2005.10). 所教学生曾荣获1998年黄石高考理科状元. 出版书籍15部(主编4部,合著9部),在《数学通报》、《中等数学》等十多家国家级、省级刊物上发表论文一百多篇(其中国家级15篇),十多篇论文收入各种大型文集,十余篇论文获得各种奖励,两篇论文分别取得1998年在韩国举行的第一次东亚数学教育会议中的"教学过程组"和"中学数学过程组"宣读论文的资格,并收入该会论文集.

平方筛选数阵

杨　之

（天津市宝坻区教研室，天津　301800）

数列筛选问题，历来被视为数学中的困难问题之一. 如艾氏素数筛法，至今只作程序使用. 然而，二元素数筛选，考虑"筛剩下的"，则形成等差数阵（素筛数阵）. 这启发我们，筛选问题在平面上研究，可能呈现某种简单规律性.

1. 背景问题

这是一道 IMO 试题[1]：将数列 $\{x_n\}$ 中，处于平方数位置的项构成的子列 $\{x_{k^2}\}$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 称为平方子列，令从自然数列 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 中，删去平方子列，在剩下的项 $\{2,3,5,6,7,\cdots\}$ 中，再删去平方（数位置的）子列，如此继续，第 m 次删去的第 n 个数记作 $f(m,n)$，则求：

ⅰ）$f(m,n)$ 的表达式；

ⅱ）正整数 m,n，使 $f(m,n)=1992$.

2. 平方（位）筛选数阵

上述问题孕育着一个奇巧的数阵. 因为要求 $f(m,n)$，就要把逐次筛选出的平方位上的数组织起来，排成一个平面数阵

$$A=\{a_{ij}\}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & \cdots \\ 2 & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 & 56 & 72 & \cdots \\ 3 & 8 & 15 & 24 & 35 & 48 & 63 & 80 & \cdots \\ 5 & 11 & 19 & 29 & 41 & 55 & 71 & 89 & \cdots \\ 7 & 14 & 23 & 34 & 47 & 62 & 79 & 98 & \cdots \\ 10 & 18 & 28 & 40 & 54 & 70 & 88 & 108 & \cdots \\ 13 & 22 & 33 & 46 & 61 & 78 & 97 & 118 & \cdots \\ 17 & 27 & 39 & 53 & 69 & 87 & 107 & 129 & \cdots \\ 21 & 32 & 45 & 60 & 77 & 96 & 117 & 140 & \cdots \\ 26 & 38 & 52 & 68 & 86 & 106 & 128 & 152 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{1}$$

在[1]中，南昌陶平生先生用"斜线构造"技术，证明了逐次筛选出的数，确构成了数阵(1)：$A=\{a_{ij}\}$ 中，a_{ij} 表示第 i 次筛选出的第 j 个数 $(i,j=1,2,3,\cdots)$，而 A 可按(1)中的斜虚线，逐步写出：先是 1，然后 2，继之为 3，4；5，6；7，8，9；…. A 有如下性质：

性质 1　每行都是二阶等差数列，二阶差为 2.

性质 2　每列都是双二阶等差数列，双二阶差为 1. 如：

第 1 列：1　2　3　5　7　10　13　17　21　…

（一阶差）1　1　2　2　3　3　4　4　…

（二阶差）　1　1　1　…

第 2 列：4　6　8　11　14　18　22　27　32　38　…

（一阶差）2　2　3　3　4　4　5　5　6　…

（二阶差）1　1　1　1　…

性质 3　主对角线（左上到右下）及与其平行的斜线上的数列，为二阶摆动数列（二阶差为 5，4 或 4，5）. 如：

$\{a_{ii}\}$：1　6　15　29　47　70　97　…

（一阶差）5　9　14　18　23　27　…

（二阶差）4　5　4　5　4　…

观察"副对角线"（即由左下到右上，同主对角线"垂直"方向的）数列：

3，6，9；5，8，12，16；7，11，15，20，25；10，14，19，24，30，36；…

似为分段等差数列，规律不明显，而看斜率更大的斜线（见(1)中的虚斜线）上的数列：

l_1：{1}

l_2：{2}

l_3：{3，4}

l_4：{5，6}

l_5：{7，8，9}

l_6：{10，11，12}

l_7：{13，14，15，16}

l_8：{17，18，19，20}

l_9：{21，22，23，24，25}

l_{10}：{26，27，28，29，30}

⋮

会发现,它们是一些构造有致的"自然数段".

性质4 数列 $l_1,l_2,\cdots,l_m,\cdots$ 满足:

①$l_i\cap l_j=\varnothing(i\neq j)$, $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}l_m=N$;

②$l_m(m=1,2,3,\cdots)$ 中含有 $[\frac{m+1}{2}]=\frac{1}{4}[2m+1-(-1)^m]$ 个数.

③对 $k=0,1,2,\cdots$, l_{2k+1} 和 l_{2k+2} 各含有 $k+1$ 个数,它们是

$l_{2k+1}:\{k^2+k+1,k^2+k+2,\cdots,k^2+2k,k^2+2k+1\}$

$l_{2k+2}:\{(k+1)^2+1,(k+1)^2+2,\cdots,(k+1)^2+k,(k+1)^2+(k+1)\}$

这些性质完整地刻画了 A 的斜线结构,但这些观察到的性质,其证明有待从 A 的定义导出的通项公式.

3. 通项公式

按 A 的定义,可求直通项公式.我们采用先求 i 行通项、第1列通项,再综合的方法.

引理1 在平方筛选数阵 $A=\{a_{ij}\}$ 中,对固定的 i, $\{a_{ij}\}$ 是 j 的二阶等差数列,二阶差为2.

证明 对 i 施行数学归纳法,按 A 的定义:

$i=1$ 时,有 $a_{1j}=j^2$, $\{j^2\}$ 确为 j 的二阶等差数列,二阶差为2.可见结论成立.

现设对 $i=m\geqslant 1$,命题成立($\{a_{mj}\}$ 为二阶等差数列,二阶差为2).考虑 $\{a_{m+1,j}\}$.按 A 的定义:从原来自然数列看:从第 m 次筛出的第 j 个数 a_{mj} 的后一数 $(a_{mj}+1)$ 数起,向后数到第 $[\frac{m+1}{2}]+j-1$ 个数,就是第 $m+1$ 次筛选出的第 j 个数(这可归纳地加以理解)因此,有

$$a_{m+1,j}=a_{mj}+[\frac{m+1}{2}]+j-1\ \ ([x]\text{ 表 }x\text{ 整数部分})\tag{2}$$

以 Δ_j 表示对于 j 的差分,则有

$$\Delta_j a_{m+1,j}=\Delta_j a_{mj}+([\frac{m+1}{2}]+(j+1)-1)-([\frac{m+1}{2}]+j-1)=\Delta_j a_{mj}+1$$

所以

$$\Delta_j^2 a_{m+1,j}=\Delta_j(\Delta_j a_{mj}+1)=\Delta_j^2 a_{mj}=2$$

可见,对一切 i,命题为真.

引理2 在数阵 $A=\{a_{ij}\}$ 中,行数列(即 i 固定,关于 j 的数列) $\{a_{ij}\}$ 的通项公式为

$$a_{ij}=a_{i1}+(i+j)(j-1)\tag{3}$$

证明 二阶等差数列的通项公式为

$$a_{ij}=a_{i1}+C_{j-1}^1\Delta_j a_{i1}+C_{j-1}^2\Delta_j^2 a_{i1}$$

由引理1, $\Delta_j^2 a_{ij}=2$,故 $\Delta_j^2 a_{i1}=2$.按平方筛选的定义,总有(可归纳地证明) $\Delta_j a_{i1}=a_{i2}-a_{i1}=i+2$,从而有

$$a_{ij}=a_{i1}+(j-1)(i+2)+\frac{1}{2}(j-1)(j-2)\cdot 2=a_{i1}+(i+j)(j-1)$$

引理3 在数阵 $\{a_{ij}\}$ 中, a_{i1} 的通项公式为

$$a_{i1}=\frac{1}{8}[2i^2+7+(-1)^i]\ (i=1,2,3,\cdots)\tag{4}$$

证明 考察数列 a_{i1},以 $\{b_i\}$ 表示它的差分数列:

$\{a_{i1}\}$:1,2,3,5,7,10,13,17,21,…

$\{b_i\}$:1,1,2,2,3,3,4,4,…

就是 $a_{11}=1$, $a_{21}-a_{11}=b_1$, $a_{31}-a_{21}=b_2$, $\cdots$, $a_{i1}-a_{i-1,1}=b_{i-1}$,诸式相加:

$$a_{i1}=a_{11}+\sum_{k=1}^{i-1}b_k=1+s_{i-1}\quad(i\geqslant 2)$$

易见

$$s_{i-1}=\begin{cases}\frac{1}{4}i^2 & (i=2,4,6,8,\cdots)\\ \frac{i^2-1}{4} & (i=3,5,7,9,\cdots)\end{cases}$$

所以

$$a_{i1}=s_{i-1}+1=\begin{cases}\frac{1}{4}(i^2+3)+\frac{1}{4} & (i=2,4,6,\cdots)\\ \frac{1}{4}(i^2+3)+0 & (i=1,3,5,\cdots)\end{cases}=\frac{1}{4}(i^2+3)+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}[1+(-1)^i]\quad(i=1,2,3,\cdots)$$

略加整理,就是式(4).

将式(4)代入式(3),就得到:

定理1 平方筛选数阵 $A=\{a_{ij}\}$ 的(直)通项公式为

$$a_{ij}=(i+j)(j-1)+\frac{1}{8}[2i^2+7+(-1)^i]\ (i,j=1,2,3,\cdots)\tag{5}$$

为了求斜通项公式,我们需要如下:

引理4 (第1下标转换公式)设 x_{kl} 表示第 k 条同主对角线垂直的斜线上的第 l 个数,设 $x_{kl}=a_{ij}$,则有

$$\begin{cases}k=i+j-1\\ l=j\end{cases}\text{或}\begin{cases}i=k-l+1\\ j=l\end{cases}\tag{6}$$

证明 我们由(k,l)位置出发，沿第k斜行向左下移动$a_{ij}=x_{kl}$，来考察i,j,l的变化：每移动1个位置，l减少1，i增加1，j也减少1，一直移到$(k,1)$位置，这时，l减少了$(l-1)$，i增加了$(l-1)$，j也减少了$(l-1)$，(i,j)变成了$(i+(l-1),j-(l-1))$.

所以
$$x_{k,1}=a_{i+(l-1),j-(l-1)}$$
即$k=i+l-1$，$1=j-l+1$，即得式(6).

引理5 （第2下标转换公式）设$x'_{m,n}(m=1,2,3,\cdots,n=1,2,\cdots,[\frac{m+1}{2}])$为数阵$A=\{a_{ij}\}=\{x'_{m,n}\}$的第$m$条斜线$l_m$上（从左下向右上数）的第$n$个数，如$x'_{m,n}=a_{ij}$，则
$$\begin{cases}m=i+2(j-1)\\n=j\end{cases}\text{或即}\begin{cases}i=m-2(n-1)\\j=n\end{cases}\quad(7)$$

证明 由于$a_{ij}=x'_{m,n}$既是l_m上第n个数，又是第i行上第j个数，而"第几个数"就是横行、斜行同第几列交点处的数，因此，$n=j$.

现在考虑第i行：易见，a_{i1}在斜线l_i上，a_{i2}在l_{i+2}上，a_{i3}在l_{i+4}上，…，a_{ij}在$l_{i+2(j-1)}$上，这时$x'_{m,1}=a_{i+2(j-1),1}$，可见$m=i+2(j-1)$. 故式(7)正确.

将式(6)和式(7)分别代入式(5)，即得：

定理2 数阵$A=\{a_{ij}\}=\{x_{kl}\}$的第1斜通项公式为
$$x_{kl}=\frac{1}{8}[2(k+1)^2-4(k-l)+1-(-1)^{k-l}]$$
$$(1\leqslant l\leqslant k=1,2,3,\cdots)\quad(8)$$

定理3 数阵$A=\{a_{ij}\}=\{x'_{mn}\}$的第2斜通项公式为
$$x'_{mn}=\frac{1}{8}[2m^2+8n-1+(-1)^m]$$
$$(1\leqslant n\leqslant[\frac{m+1}{2}],m=1,2,3,\cdots)\quad(9)$$

这样，我们就有了平方筛选数阵A的三个通项公式，依之，不难给出性质1－4的证明. 有兴趣的读者不妨自己为之.

4. 背景问题的解答

背景问题ⅰ)，只需将式(5)中的i换成m，j换成n，立得
$$f(m,n)=(m+n)(n-1)+\frac{1}{8}[2m^2+7+(-1)^m]$$
对于ⅱ)，由$f(m,n)=1\,992$，先设m为奇数，得
$$(m+n)(n-1)+\frac{1}{8}(2m^2+6)=1\,992$$
$$4(m+n)(n-1)+m^2+3=7\,968$$
$$4mn+4n^2+m^2-4(m+n)=7\,965$$
$$(m+2n)^2=7\,965+4(m+n)$$
而
$$7\,921=89^2<7\,965<90^2<91^2$$
m为奇数. $(m+2n)^2$为奇数，从而知可取
$$7\,965+4(m+2n)=91^2$$
所以
$$\begin{cases}m+2n=91\\4(m+2n)=91^2-7\,965\end{cases}$$
解得$m=67$，$n=12$，$f(67,12)=1\,992$.

由于每个自然数在A中恰出现一次，不必再考虑m为偶的情形.

所谓平方筛选，实际上定义了自然数某种重排，形成了自然数阵，进而，还可考虑立方筛选问题，某种线性筛选问题等，研究前景十分广阔.

参考文献

[1] 陶平生. 拟题并解答[J]. 中等数学，1994(1-2).
[2] 杨之. 初等数学研究的问题与课题[M]. 长沙：湖南教育出版社，1993.

四面体的等距共轭点性质初探

曾建国

（赣南师范学院数学与计算机科学学院,江西　赣州　341000）

摘　要:将三角形等距共轭点的概念推广至四面体中,得到了关于四面体的等距共轭点的4个优美性质.

关键词:四面体　等距共轭点

1. 引言

三角形中所谓"等距共轭点"有两种含义——三角形的等距共轭点和三角形边上的等距共轭点:

在三角形的一边所在直线上取两点 M,N,关于该边的中点对称,称 M,N 为这条边上的等距共轭点[1].

而三角形的等距共轭点概念由下面的定理给出(图0)[1]:

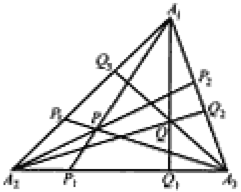


图0

定理0　设 P_1、Q_1,P_2、Q_2,P_3、Q_3 分别是 $\triangle A_1A_2A_3$ 的边 A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2 上的等距共轭点,若直线 A_1P_1、A_2P_2、A_3P_3 相交于一点 P,则直线 A_1Q_1、A_2Q_2、A_3Q_3 也相交于一点 Q.称 P,Q 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 的等距共轭点.

本文拟将三角形等距共轭点的概念推广至四面体中,并对四面体的等距共轭点的性质作初步研究.

2. 四面体等距共轭点的定义及性质

三角形边上的等距共轭点概念可以拓广至四面体棱上的等距共轭点,即:

定义　在四面体的一条棱所在直线上取两点 M,N,关于该棱的中点对称,称 M,N 为这条棱上的等距共轭点.

2.1　四面体的一个共面定理

首先将一个关于三角形边上的等距共轭点的性质推广至四面体中.

引理1　设 A_1 与 A_2,B_1 与 B_2,C_1 与 C_2 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上的等距共轭点,若 A_1,B_1,C_1 在一条直线上,则 A_2,B_2,C_2 也在一条直线上.

证明　若直线 $A_1B_1C_1$ 过 $\triangle ABC$ 的顶点,则容易验证 A_2、B_2、C_2 在一条直线上且也经过 $\triangle ABC$ 的一顶点.

现假设 A_1,B_1,C_1 都不是 $\triangle ABC$ 的顶点,如图1,由题设及 Menelaus 定理知

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=-1$$

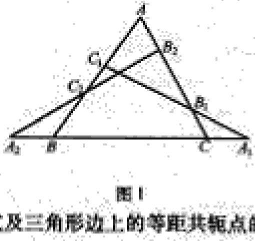


图1

由上式及三角形边上的等距共轭点的定义可知

$$\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{A_1C}{BA_1}\cdot\frac{B_1A}{CB_1}\cdot\frac{C_1B}{AC_1}=-1$$

根据 Menelaus 定理知,A_2,B_2,C_2 也在一条直线上.命题得证.

将上面的这个性质推广至四面体中，就得：

定理1 设 B_{ij}、B'_{ij} 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱 A_iA_j 上的等距共轭点（$1\leqslant i<j\leqslant 4$），若诸点 B_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）在同一平面（与四面体的侧面不重合）内，则诸点 B'_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）也在同一平面内.

证明 设诸点 B_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）所在的平面为 π，依题设知，平面 π 至多经过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的两个顶点.

（1）当平面 π 不经过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点时，则平面 π 与四面体的每个侧面都相交于一直线. 如图2，设平面 π 与侧面 $A_2A_3A_4$ 相交，则平面 π 与三角形 $A_2A_3A_4$ 的各边的三个交点 B_{23}，B_{24}，B_{34} 相异且共线. 根据引理1知，它们在各自边上的等距共轭点 B'_{23}，B'_{24}，B'_{34} 也相异且共线.

同理可知，B'_{12}，B'_{13}，B'_{23}；B'_{13}，B'_{14}，B'_{34}；B'_{12}，B'_{14}，B'_{24} 分别三点相异且共线.

由于上述四条直线中，每三条直线两两相交于相异的三点（如图2），显然可知这四条直线在同一个平面内，即六个点 B'_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）在同一平面内.

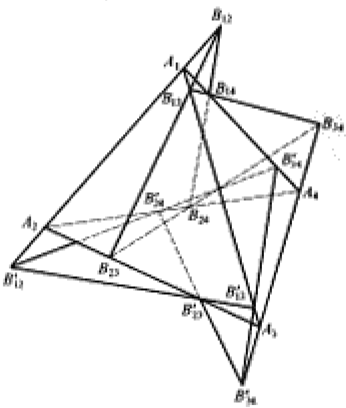


图2

（2）当平面 π 经过且仅经过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的一个顶点时，设平面 π 经过顶点 A_1（图略），易知此时三点 B_{12}，B_{13}，B_{14} 重合于点 A_1，则它在棱 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4 上的等距共轭点分别为 A_2，A_3，A_4，它们与 B'_{23}，B'_{24}，B'_{34} 均在平面 $A_2A_3A_4$ 内，表明结论也成立.

（3）当平面 π 恰经过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的两个顶点时，如图3，设平面 π 经过顶点 A_1，A_4 且与 A_2A_3 交于 B_{23}，易知点 A_1（即 B_{12}，B_{13}），A_4（即 B_{24}，B_{34}），B_{14}，B_{23} 在相应棱上的等距共轭点分别为 A_2，A_3，B'_{23}，B'_{14}，它们显然共面 $A_2A_3B'_{14}$.

命题得证.

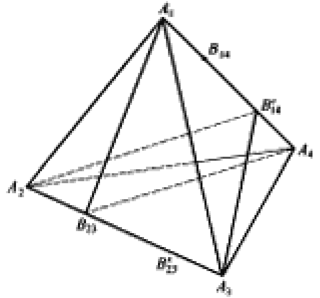


图3

2.2 定理0的两种推广

三角形的等距共轭点由定理0这一优美性质而得名，我们可从多个角度将定理0推广至四面体中.

定理2 过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱 A_iA_j 作平面 π_{ij}，π'_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）与对棱 A_kA_l 分别相交于该棱上的一对等距共轭点 B_{kl}，B'_{kl}（$1\leqslant k<l\leqslant 4$），若诸平面 π_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）交于一点 P（非四面体的顶点），则诸平面 π'_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）也交于一点 Q.

为定理2证明叙述简便起见，先证明下面的引理：

引理2 过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱 A_iA_j 作平面 π_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）与对棱 A_kA_l 相交于点 B_{kl}（$1\leqslant k<l\leqslant 4$），则诸平面 π_{ij}（$1\leqslant i<j\leqslant 4$）交于一点 P（非四面体的顶点）的充分必要条件是：在平面 π_{ij} 中，过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 任一顶点的三条棱所作的三个平面均相交于一直线.

证明 必要性是明显的. 例如（图4），过顶点 A_1 的三条棱所作的三个平面显然有两个公共点 A_1 和 P，故此它们交于直线 A_1P.

下面证充分性：

设过顶点 A_1 的三条棱所作的三平面 π_{12}，π_{13}，π_{14} 相交于直线 A_1P_1（P_1 在面 $A_2A_3A_4$ 内）；过顶点 A_2 的三条棱所作的三平面 π_{12}，π_{23}，π_{24} 相交于直线 A_2P_2.

则 A_1P_1，A_2P_2 在同一平面 π_{12} 内，故它们必相交于一点 P. 因为点 P 又在平面 π_{13} 和 π_{23} 内，所以点 P 也在平面 π_{13}，π_{23}，π_{34} 的交线 A_3P_3 上. 同理，点 P 也在平面 π_{14}，π_{24}，π_{34} 的交线 A_4P_4 上.

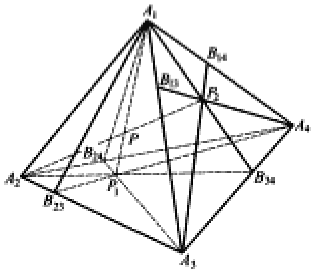


图 4

由此可知，$A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4$ 交于一点 P，这表明 6 个平面 $\pi_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 交于一点 P. 命题得证.

定理 2 证明　如图 5，依题设及引理 2 知，过顶点 A_1 的三条棱所作的三个平面 $\pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{14}$ 相交于一直线，设为 A_1P_1（P_1 在面 $A_2A_3A_4$ 内）.

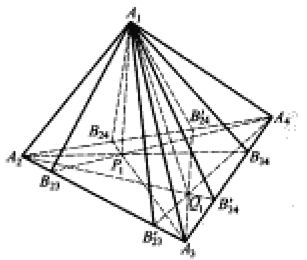


图 5

也就是说，在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中，直线 $A_2B_{34}, A_3B_{24}, A_4B_{23}$ 交于一点 P_1.

根据定理 0 知，直线 $A_2B'_{34}, A_3B'_{24}, A_4B'_{23}$ 也交于一点 Q_1.

这就表明，平面 $\pi'_{12}, \pi'_{13}, \pi'_{14}$ 相交于直线 A_1Q_1.

在平面 $\pi'_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 中，同理可证，过其他每个顶点的三条棱所作的相应三个平面也分别相交于一直线.

于是，由引理 2 可知，诸平面 $\pi'_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 相交于同一点 Q. 命题得证.

根据定理 2 及定理 0，可得下面的结论

定理 3　设 P_i, Q_i 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对侧面三角形的一对等距共轭点（$i = 1,2,3,4$），若 $A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4$ 相交于一点 P（非四面体的顶点），则 $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ 也交于一点 Q.

证明　如图 6，依题设，P_1, Q_1 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的等距共轭点，根据三角形等距共轭点的定义（定理 0）知，在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中有两组过顶点的三条直线分别相交于点 P_1 和点 Q_1，且它们分别交三边于各边上的一对等距共轭点.

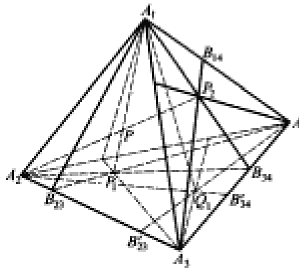


图 6

按上述方法，在 $\triangle A_1A_3A_4$ 的三边上也可以各得到一对等距共轭点. 这样，在相邻两个面（如 $\triangle A_2A_3A_4$ 与 $\triangle A_1A_3A_4$）的公共棱（A_3A_4）上就出现两对等距共轭点.

现证明这两对等距共轭点是同一对等距共轭点.

事实上，依题设知，A_1P_1 与 A_2P_2 相交于一点 P，因此，A_2P_1 与 A_1P_2 共面且相交于棱 A_3A_4 上唯一的点 B_{34}，从而 B_{34} 在棱 A_3A_4 上的等距共轭点也是唯一的点 B'_{34}.

同理可知其他棱上的情形也都如此. 这就证明了按上述方法可在四面体的每条棱上分别得到一对等距共轭点，设棱 A_kA_l 上的一对等距共轭点为 B_{kl}，$B'_{kl}(1 \leqslant k < l \leqslant 4)$，并设点 B_{kl}, B'_{kl} 分别与对棱 A_iA_j 确定的两个平面为 $\pi_{ij}, \pi'_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$.

依题设，$A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4$ 相交于一点 P（非四面体的顶点），即诸平面 $\pi_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 交于一点 P，根据定理 2 知，诸平面 $\pi'_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 交于一点 Q. 也就证明了 $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ 交于一点 Q. 命题得证.

定理 2 和定理 3 从不同角度惟妙惟肖地推广了三角形等距共轭点的优美性质（定理 0），我们不妨称这两个定理中的点 P 和 Q 为“四面体的等距共轭点”.

考察定理 2 和定理 3 的特例，可以得到下面有趣的性质：

推论 1　以四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心为球心作一

球面与棱 A_kA_l 交于两点 B_{kl}, B'_{kl}($1 \leqslant k < l \leqslant 4$,交点非四面体的顶点),点 B_{kl}, B'_{kl} 分别与对棱 A_iA_j 确定的两个平面记为 π_{ij}, π'_{ij}($1 \leqslant i < j \leqslant 4$),若诸平面 π_{ij}($1 \leqslant i < j \leqslant 4$)交于一点,则诸平面 π'_{ij}($1 \leqslant i < j \leqslant 4$)也交于一点.

推论 2 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 所对侧面三角形的约尔刚(Gergonne)点为 P_i、奈格尔(Nagel)点[1]为 Q_i($i = 1,2,3,4$),若 $A_1P_1, A_2P_2, A_3P_3, A_4P_4$ 相交于一点,则 $A_1Q_1, A_2Q_2, A_3Q_3, A_4Q_4$ 也交于一点.

2.3 定理 0 的另一种推广

在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,过顶点 A_1 作平面 π_1 与 A_1 所对面 $A_2A_3A_4$ 的三边相交于 B_{23}, B_{24}, B_{34},根据引理 1 知,它们在各自边上的等距共轭点 $B'_{23}, B'_{24}, B'_{34}$ 也共线. 则 $A_1, B'_{23}, B'_{24}, B'_{34}$ 四点在同一平面 π'_1 内. 称上述两个平面 π_1, π'_1 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的过顶点 A_1 的一对等距共轭面.

定理 0 还可以推广为下面有趣的结论:

定理 4 过四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的顶点 A_i 作一对等距共轭面 π_i, π'_i($i = 1,2,3,4$,平面 π_i 不经过除 A_i 外的其他顶点),若平面 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 交于同一点 P,则 $\pi'_1, \pi'_2, \pi'_3, \pi'_4$ 也交于同一点 Q.

(定理 4 中的两点 P, Q 也可称为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的等距共轭点.

定理 4 的证明还需要下面的引理

引理 4[2] 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的单形,其顶点集为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$,过顶点 A_j 的 $n-1$ 维超平面为 π_j,顶点 A_i 到 π_j 的有向距离为 d_{ij}($1 \leqslant i, j \leqslant n+1$),则 $n+1$ 个超平面 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{n+1}$ 共点的充要条件是

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & \cdots & d_{1,n+1} \\ d_{21} & 0 & \cdots & d_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n+1,1} & d_{n+1,2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

定理 4 证明 设过四面体顶点 A_j 的等距共轭面 π_j, π'_j 与棱 A_iA_l 分别交于 B_{il}, B'_{il},且 $\frac{A_iB_{il}}{B_{il}A_l} = \lambda_{il}$($1 \leqslant i, j, l \leqslant 4$,且 i, j, l 互不相等),则根据等距共轭面的定义知 $\frac{A_iB'_{il}}{B'_{il}A_l} = \frac{1}{\lambda_{il}}$.

又设顶点 A_i 到 π_j, π'_j 的有向距离为 d_{ij}, d'_{ij}(依题设知 d_{ij}, d'_{ij} 均不为 0). 由图 7,易知[2]

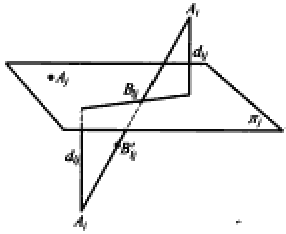


图 7

$$\frac{d_{ij}}{d_{lj}} = -\frac{A_iB_{il}}{B_{il}A_l} = -\lambda_{il}$$

$$\frac{d'_{ij}}{d'_{lj}} = -\frac{A_iB'_{il}}{B'_{il}A_l} = -\frac{1}{\lambda_{il}} = -\lambda_{li}$$

($1 \leqslant i, j, l \leqslant 4$,且 i, j, l 互不相等) (1)

依题设,平面 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 共点,根据引理 2 知

$$\begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

第 1 - 4 列分别提取 $d_{41}, d_{12}, d_{23}, d_{34}$ 得

$$d_{12}d_{23}d_{34}d_{41} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{d_{13}}{d_{23}} & \frac{d_{14}}{d_{34}} \\ \frac{d_{21}}{d_{41}} & 0 & 1 & \frac{d_{24}}{d_{34}} \\ \frac{d_{31}}{d_{41}} & \frac{d_{32}}{d_{12}} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{d_{42}}{d_{12}} & \frac{d_{43}}{d_{23}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

注意到式(1) 可得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} \\ -\lambda_{24} & 0 & 1 & -\lambda_{23} \\ -\lambda_{34} & -\lambda_{31} & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_{41} & -\lambda_{42} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

调换各列的顺序就得

---

[1] 由文[1] 知,三角形的约尔刚(Gergonne)点与奈格尔(Nagel)点是等距共轭点.

[2] 对于两点 A, B 到平面 π 的有向距离 d, d' 规定如下:当 A, B 在平面 π 的同侧时,d 与 d' 同号;当 A, B 在平面 π 的异侧时,d 与 d' 异号.

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_{23} & -\lambda_{24} \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 & -\lambda_{34} \\ -\lambda_{41} & -\lambda_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

根据引理2，欲证 $\pi'_1,\pi'_2,\pi'_3,\pi'_4$ 交于同一点，只需证

$$\begin{vmatrix} 0 & d'_{12} & d'_{13} & d'_{14} \\ d'_{21} & 0 & d'_{23} & d'_{24} \\ d'_{31} & d'_{32} & 0 & d'_{34} \\ d'_{41} & d'_{42} & d'_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

第1－4列分别提取 $d'_{21},d'_{32},d'_{43},d'_{14}$ 得，式(4)等价于

$$d'_{21}d'_{32}d'_{43}d'_{14}\cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{d'_{12}}{d'_{32}} & \frac{d'_{13}}{d'_{43}} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{d'_{23}}{d'_{43}} & \frac{d'_{24}}{d'_{14}} \\ \frac{d'_{31}}{d'_{21}} & 1 & 0 & \frac{d'_{34}}{d'_{14}} \\ \frac{d'_{41}}{d'_{21}} & \frac{d'_{42}}{d'_{32}} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

根据式(1) 可知式(5) 等价于

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_{31} & -\lambda_{41} & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda_{42} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{23} & 1 & 0 & -\lambda_{13} \\ -\lambda_{24} & -\lambda_{14} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

将行列式转置可知上式等价于

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\lambda_{23} & -\lambda_{24} \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 & -\lambda_{14} \\ -\lambda_{41} & -\lambda_{42} & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

适当调换各行顺序就是

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_{23} & -\lambda_{24} \\ -\lambda_{31} & 0 & 1 & -\lambda_{34} \\ -\lambda_{41} & -\lambda_{42} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

由式(3) 知上式成立，命题得证.

参考文献

[1] R·A·约翰逊. 近代欧氏几何学[M]. 单墫，译. 上海：上海教育出版社，1999.

[2] 张晗方. Ceva 定理的高维推广[J]. 徐州师范大学学报，1997，15(1)：20-22.

[3] 曾建国. 四面体的等距共轭点及其性质[J]. 数学通讯，2006(15)：32-33.

作者简介

曾建国，1965年生，男，江西于都人，硕士. 赣南师范学院数学与计算机科学学院副教授，硕士生导师.

四面体的欧拉球面及其性质

熊曾润
（赣南师范学院，江西　赣州　341000）

摘　要：应用向量方法，定义了任意四面体的欧拉球面概念，并揭示了它的一系列优美性质.

关键词：四面体　伪垂心　欧拉球面

众所周知，关于三角形有如下命题：

定理 0　以三角形的外心与垂心连线的中点为圆心，外接圆半径的一半为半径的圆，必通过 9 个特殊点，即：3 个顶点与垂心连线的中点，3 条边的中点，以及 3 条高的垂足.

这就是近代欧氏几何学中著名的九点圆定理. 其中所说的圆，有人称它为欧拉（Euler）圆，也有人称它为费尔巴哈（Feuerbach）圆. 美国数学家 R・A・约翰逊在其名著[1]中，专辟"九点圆"一章，系统地介绍了这个圆的众多优美性质，足见它在近代欧氏几何学中的地位. 近年来，笔者试图将其中的一些结论类比推广到一般四面体中，建立了一般四面体的"欧拉球面"概念，并揭示了它的一些鲜为人知的性质. 现综述如下，供读者参考.

1. 欧拉球面的概念

本文约定：在任意四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，顶点 A_j 所对的侧面记作 $\Delta_j(j=1,2,3,4)$；以点 O 为球心、长度 R 为半径的球面记作 $S(O,R)$.

定义 1　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，若点 H 满足

$$\overrightarrow{OH}=\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\qquad(1)$$

则点 H 称为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的伪垂心；以线段 OH 的中点 E 为球心、$\frac{R}{2}$ 为半径的球面，称为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球面，记作 $S(E,\frac{R}{2})$[2][3].

其中，点 E 的向量表示为

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}\qquad(2)$$

定义 2　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，若点 H_j 满足

$$\overrightarrow{OH_j}=\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}\qquad(3)$$

则点 H_j 称为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的侧面 Δ_j 的伪垂心；以线段 OH_j 的中点 E_j 为球心、$\frac{R}{2}$ 为半径的球面，称为侧面 Δ_j 的欧拉球面，记作 $S(E_j,\frac{R}{2})(j=1,2,3,4)$.

其中，点 E_j 的向量表示为

$$\overrightarrow{OE_j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH_j}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j}\right)\qquad(4)$$

2. 欧拉球面的性质

定理 1　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，其伪垂心为 H，则其欧拉球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 必通过诸线段 A_jH 的中点 $M_j(j=1,2,3,4)$.

证明　显然，只需证明 $|EM_j|=\frac{R}{2}$ 就行了.

事实上，点 H 满足式(1)，而 M_j 是 A_jH 的中点，所以有

$$\overrightarrow{OM_j}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA_j})=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}+\overrightarrow{OA_j}\right)\qquad(5)$$

据此，注意到点 E 满足式(2)，可得

$$\overrightarrow{EM_j}=\overrightarrow{OM_j}-\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_j}$$

但顶点 A_j 在球面 $S(O,R)$ 上，所以 $|OA_j|=R$，从而由上式可知 $|EM_j|=\frac{R}{2}(j=1,2,3,4)$. 命题得证.

定理 2　设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，则其欧拉球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 必通过各侧面 Δ_j 的欧拉

球心 $E_j(j=1,2,3,4)$.

证明 显然,只需证明 $|EE_j|=\frac{R}{2}$ 就行了.

事实上,点 E 和 E_j 分别满足式(2) 和(4),所以有

$$\overrightarrow{E_jE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OE_j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA_j}$$

由此可知 $|E_jE|=\frac{R}{2}(j=1,2,3,4)$. 命题得证.

由这个定理显然可得:

推论 1 在四面体中,各侧面的欧拉球面必相交于同一点,这个点正是这个四面体的欧拉球心.

定理 3 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$,其伪垂心为 H,其侧面 Δ_j 的欧拉球心为 E_j,过点 E_j 作直线与直线 A_jH 垂直相交于 D_j,则四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 必通过诸垂足 $D_j(j=1,2,3,4)$.

证明 取线段 A_jH 的中点 M_j,则由定理1和定理2可知,点 M_j 和 E_j 都在球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 上;又已知 $\angle E_jD_jM_j=90°$. 据此易知,要证明球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 通过垂足 D_j,只需证明线段 E_jM_j 是这个球面的直径就行了.

事实上,点 E_j 和 M_j 分别满足式(4) 和(5),所以有

$$\overrightarrow{E_jM_j}=\overrightarrow{OM_j}-\overrightarrow{OE_j}=\overrightarrow{OA_j}$$

由此可知,$|E_jM_j|=R$,因此线段 E_jM_j 是球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 的直径$(j=1,2,3,4)$. 命题得证.

综合定理 1,2,3,可得:

定理 4 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球面必通过12 个特殊点,即:各顶点 A_j 与伪垂心 H 连线的中点 $M_j(j=1,2,3,4)$;各侧面 Δ_j 的欧拉球心 $E_j(j=1,2,3,4)$;过点 E_j 作直线与直线 A_jH 垂直相交的垂足 $D_j(j=1,2,3,4)$[4][5].

显然,定理 4 是定理 0 在四面体中的一种惟妙惟肖的类比推广.

定理 5 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心为 O,其侧面 Δ_j 的伪垂心为 H_j,则诸线段 $A_jH_j(j=1,2,3,4)$ 必相交于同一点,且被这个点平分,这个点正是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球心 E.

证明 应用同一法. 设 A_jH_j 是题设中的任一线段,其中点为 E',那么只需证明点 E' 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球心 E 就行了.

事实上,点 H_j 满足式(3),E' 是线段 A_jH_j 的中点,所以

$$\overrightarrow{OE'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OH_j})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i} \quad (6)$$

比较式(6) 与(2),可知点 E' 是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球心 E. 命题得证.

定理 6 四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球心 E 与任一条棱的中点的连线,必垂直对棱.

证明 取四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的任一条棱,为了确定起见,不妨取 A_1A_2,设其中点为 M,下面证明 ME 垂直于对棱 A_3A_4.

设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$. 因为 M 是 A_1A_2 的中点,所以有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})$;又点 E 满足式(2). 从而有

$$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})$$

于是 $\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})\cdot(\overrightarrow{OA_4}-\overrightarrow{OA_3})=\frac{1}{2}(OA_4^2-OA_3^2)=R^2-R^2=0.$

这就表明 $ME\perp A_3A_4$. 命题得证.

由这个定理易得:

推论 2 在四面体中,过各棱的中点作对棱的垂直平面,则所得的 6 个平面必相交于同一点,这个点正是这四面体的欧拉球心.

定理 7 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中,其欧拉球心 E 与任一条棱的中点的连线,必平行于外心 O 与对棱中点的连线,且二者相等.

证明 任取四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的一组对棱,为了确定起见,不妨取 A_1A_2 和 A_3A_4. 设它们的中点依次为 M 和 N,则

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}).$$

于是,注意到点 E 满足式(2),可得

$$\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4})=\overrightarrow{ON}$$

由此可知，$ME \parallel ON$，且 $|ME| = |ON|$. 命题得证.

由这个定理易得：

推论 3 在四面体中，过任一条棱的中点作直线，使它平行于外心与对棱中点的连线，则这样作得的 6 条直线必相交于同一点，这个点正是这四面体的欧拉球心.

定理 8 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心为 O，其伪垂心为 H，其侧面 Δ_j 的欧拉球心为 E_j，则 $A_jH \parallel OE_j$，且 $|A_jH| = 2|OE_j|(j = 1,2,3,4)$.

证明 因为点 H 和点 E_j 分别满足式(1) 和(4)，所以有

$$\overrightarrow{A_jH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA_j} = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OA_j} = 2\,\overrightarrow{OE_j}$$

由此可知，$A_jH \parallel OE_j$，且 $|A_jH| = 2|OE_j|(j = 1,2,3,4)$. 命题得证.

定理 9 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外心为 O，其侧面 Δ_j 的欧拉球心为 $E_j(j = 1,2,3,4)$，则点 O 是四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 的伪垂心.

证明 由定理 2 知，四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 的外心是四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球心 E. 因此，要证明点 O 是四面体 $E_1E_2E_3E_4$ 的伪垂心，按定义 1，只需证明如下等式成立，即

$$\overrightarrow{EO} = \sum_{j=1}^{4} \overrightarrow{EE_j} \qquad (7)$$

事实上，点 E 和点 E_j 分别满足式(2) 和(4)，所以有

$$\sum_{j=1}^{4} \overrightarrow{EE_j} = \sum_{j=1}^{4} (\overrightarrow{OE_i} - \overrightarrow{OE}) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} = -\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EO}$$

这就表明等式(7) 成立. 命题得证.

定理 10 （外心与欧拉球心的距离公式）设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，其欧拉球心为 E，则

$$OE^2 = \frac{1}{4}(16R^2 - \sum_{1\le i<j\le 4} A_iA_j^2) \qquad (8)$$

证明 由式(2) 知 $2\,\overrightarrow{OE} = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i}$，此等式两边平方可得

$$4 \cdot OE^2 = \sum_{i=1}^{4} OA_i^2 + 2 \cdot \sum_{1\le i<j\le 4} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j}$$

又，按向量的运算有

$$\sum_{1\le i<j\le 4} A_iA_j^2 = \sum_{1\le i<j\le 4} (\overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i})^2 = 3\sum_{i=1}^{4} OA_i^2 - 2 \cdot \sum_{1\le i<j\le 4} \overrightarrow{OA_i} \cdot \overrightarrow{OA_j}$$

注意到 $OA_i^2 = R^2$，以上两等式两边分别相加就得

$$4 \cdot OE^2 + \sum_{1\le i<j\le 4} A_iA_j^2 = 16R^2$$

此等式略经变形，就得到式(8). 命题得证.

由这个定理易得：

推论 4 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，则其欧拉球心 E 在外接球面上的充要条件是

$$\sum_{1\le i<j\le 4} A_iA_j^2 = 12R^2$$

定理 11 （重心与欧拉球心的距离公式）设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，其欧拉球心为 E，重心为 G，则

$$GE^2 = \frac{1}{16}(16R^2 - \sum_{1\le i<j\le 4} A_iA_j^2) \qquad (9)$$

证明 由文[2] 中的定理 1 可知 $|OE| = 2|GE|$，所以 $OE^2 = 4 \cdot GE^2$，代入式(8) 就得到等式(9). 命题得证.

定理 12 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，其欧拉球心为 E，则

$$\sum_{i=1}^{4} EA_i^2 = 4R^2 \qquad (10)$$

证明 $\sum_{i=1}^{4} EA_i^2 = \sum_{i=1}^{4} (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OE})^2 = \sum_{i=1}^{4} OA_i^2 + 4 \cdot OE^2 - 2\,\overrightarrow{OE} \cdot \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i}$.

注意到 $OA_i^2 = R^2$，且由式(2) 知 $\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA_i} = 2\,\overrightarrow{OE}$，代入上式就得到式(10). 命题得证.

定理 13 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的外接球面为 $S(O,R)$，其伪垂心为 H，其侧面 Δ_j 的欧拉球心为 E_j，过点 E_j 作直线与直线 A_jH 垂直相交于 D_j，且设此直线交球面 $S(O,R)$ 于 B_j，C_j 两点（如图1），则 $\triangle A_jB_jC_j$ 的九点圆必在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的欧拉球面 $S(E,\frac{R}{2})$ 上 $(j = 1,2,3,4)$[6].

证明 依题设，点 E_j，D_j，H 都在平面 $A_jB_jC_j$ 内，因为 $OE_j \parallel A_jH$（定理8），所以 O 也在平面 $A_jB_jC_j$ 内；从而 OH 的中点 E（定义 1）也在此平面内.

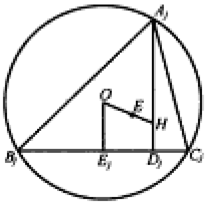


图 1

由此可知，平面 $A_jB_jC_j$ 与两个球面 $S(O,R)$、$S(E,\frac{R}{2})$ 的交线，分别是这两个球面的一个大圆，依次记作 $\odot_j(O,R)$ 和 $\odot_j(E,\frac{R}{2})$. 下面证明 $\odot_j(E,\frac{R}{2})$ 是 $\triangle A_jB_jC_j$ 的九点圆.

事实上，$\triangle A_jB_jC_j$ 的外接圆是 $\odot_j(O,R)$，点 E 是 OH 的中点，所以，要证明 $\odot_j(E,\frac{R}{2})$ 是 $\triangle A_jB_jC_j$ 的九点圆，只需证明点 H 是 $\triangle A_jB_jC_j$ 的垂心是就行了.

设 $\triangle A_jB_jC_j$ 的垂心是 H_j，则由[7] 知

$$\overrightarrow{OH_j}=\overrightarrow{OA_j}+\overrightarrow{OB_j}+\overrightarrow{OC_j} \quad (11)$$

因为 $B_jC_j\perp A_jH$，$OE_j \parallel A_jH$，所以 $B_jC_j\perp OE_j$，从而 E_j 是 B_jC_j 的中点，注意到点 E_j 满足式(4)，则有

$$\overrightarrow{OB_j}+\overrightarrow{OC_j}=2\overrightarrow{OE_j}=\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OA_j} \quad (12)$$

将式(12) 代入式(11)，就得

$$\overrightarrow{OH_j}=\sum_{i=1}^{4}\overrightarrow{OA_i} \quad (13)$$

比较式(13) 与(1)，可知 H_j 与 H 重合. 命题得证.

这个定理告诉我们：四面体的欧拉球面通过 $4\times 9=36$ 个特殊点. 我们称它为"中国 36 点球定理".

（后记）本文的所有结果，都可以推广到 n 维单形（或 n 维共球有限点集）中，文[8] 已做了其中的部分工作.

参考文献

[1] R·A·约翰逊. 近代欧氏几何学[M]. 单墫，译. 上海：上海教育出版社，1999.

[2] 熊曾润. 球内接多面体的伪垂心及其性质[J]. 福建中学数学，2005(4).

[3] 熊曾润. 四面体的欧拉球心的一个美妙性质[J]. 中学数学，2005(5).

[4] 熊曾润. 关于四面体的十二点共球定理[J]. 中学教研(数学)，2004(6).

[5] 熊曾润. 关于球内接多面体的多点共球定理[J]. 福建中学数学，2005(11).

[6] 熊曾润. 一个美妙的多圆共球定理[J]. 中学教研(数学)，2005(12).

[7] 熊曾润. 圆内接闭折线的垂心及其性质[J]. 中学数学，2000(3).

[8] 曾建国，曹新. 三角形欧拉圆的高维推广[J]. 数学的实践与认识，2007(15).

作者简介

熊曾润，1937 年生，男，江西省赣州市人，赣南师范学院数学与计算机系教授，原全国初等数学研究协调组成员，中国折线研究小组负责人. 主要从事欧氏几何研究.

与两圆根轴有关的两个几何定理

萧振纲

（湖南理工学院期刊社，湖南　岳阳　414006）

摘　要：在探讨一道早期的中国数学奥林匹克的平面几何试题的纯几何证法的过程中，得到了与两圆根轴有关的两个几何定理，并推广了原试题.

关键词：中国数学奥林匹克　平面几何　纯几何证法　根轴　推广

第五届（1992 年）中国数学奥林匹克试题中有一道优美的平面几何题[1]：

如图1所示，在凸四边形 $ABCD$ 中，AB 不平行于 CD，$\odot O_1$ 过 A,B 且与边 CD 相切于 P，$\odot O_2$ 过 C,D 且与 AB 相切于 Q，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 E,F. 求证：EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC \parallel AD$.

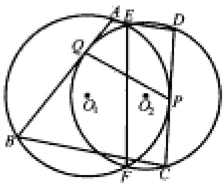


图1

供题人吴伟朝先生后来指出[2]：该题从“$BC \parallel AD$”推出“EF 平分 PQ”有一个纯几何证明，但反过来几何法即失效了，“非用代数法不可”. 但我们知道，任何一道平面几何问题总是存在其纯几何证法的（这正是平面几何的魅力所在），只不过发现的时间有早有晚. 基于这一认识，笔者在寻求上述几何题的纯几何证法的过程中，获得了与两圆根轴（根轴等有关概念和性质可见[3]）有关的一个有趣的几何事实，进而推广了上述试题. 下面以定理的形式写出.

定理1　设一直线交 $\odot O_1$ 于 A,B 两点，交 $\odot O_2$ 于 C,D 两点，且 B,C 皆在 A,D 之间，或 A,D 皆在 B,C 之间，$\odot O_1$ 在 A 点的切线与 $\odot O_2$ 在 D 点的切线交于 P，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别为 r_1 与 r_2，则下列三个条件是等价的：

（1）$AB = CD$；

（2）$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的根轴平分线段 AD；

（3）$\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

证明　当两圆相等时，结论是显然的. 下设两圆不等.

先证“$AB = CD \Leftrightarrow \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的根轴平分线段 AD”.

如图2，图3所示，设 AD 交 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的根轴 l 于 M，因 M 在两圆的根轴上，所以 $\overline{MA}\cdot\overline{MB} = \overline{MC}\cdot\overline{MD}$，即有 $\overline{MA}(\overline{MD}+\overline{DB}) = (\overline{MA}+\overline{AC})\overline{MD}$，因此，$\overline{MA}\cdot\overline{DB} = \overline{AC}\cdot\overline{MD}$，即 $\overline{AM}\cdot\overline{BD} = \overline{AC}\cdot\overline{MD}$. 于是，$AB = CD \Leftrightarrow \overline{AC} = \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{AM} = \overline{MD} \Leftrightarrow M$ 为 AD 的中点 $\Leftrightarrow$ 根轴 l 平分线段 AD.

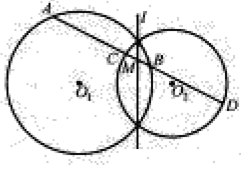


图2

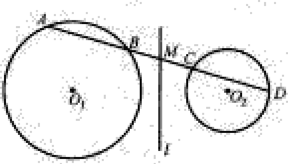


图3

再证“$\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{r_1}{r_2} \Leftrightarrow AB = CD$”.

如图4～图7所示，设直线 O_1O_2 与 AD 交于 E，$\triangle AO_1E$ 与 $\triangle DO_2E$ 的外接圆的第二个交点为 O，则有 $\angle O_1AO = \angle O_1EO = \angle O_2DO$，$\angle AOO_1 = \angle AEO_1 = \angle DEO_2 = \angle DOO_2$，故 $\triangle OO_1A \backsim$

$\triangle OO_2D$，于是有

$$\frac{OA}{OD}=\frac{O_1A}{O_2D}=\frac{r_1}{r_2} \qquad (1)$$

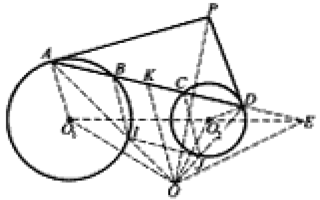


图4

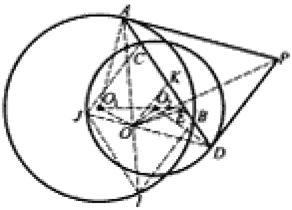


图5

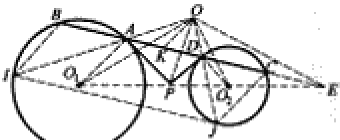


图6

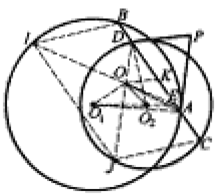


图7

设直线 OA 交 $\odot O_1$ 于另一点 I，OD 交 $\odot O_2$ 于另一点 J，因 $\triangle O_1IA$ 与 $\triangle O_2JD$ 都是等腰三角形，且它们的底角相等，所以 $\triangle O_1IA \backsim \triangle O_2JD$，从而 $\angle IO_1A=\angle JO_2D$，于是，连 IB,JC，则有 $\angle IBD=\angle IO_1A=\angle JO_2D=\angle JCD$，因此，$IB\parallel JC$.

另一方面，由 $\triangle O_1IA \backsim \triangle O_2JD$ 与式(1)可知，$\frac{IA}{JD}=\frac{O_1A}{O_2D}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{OA}{OD}$，于是，由等比定理即知 $\frac{OI}{OJ}=\frac{r_1}{r_2}$，故 $IJ\parallel AD$.

再过点 O 作 IB 的平行线交 AD 于 K，则因 $OK\parallel IB\parallel JC$，$IJ\parallel AD$，有

$$\frac{AB}{AK}=\frac{IA}{OA}=\frac{JD}{OD}=\frac{CD}{KD} \qquad (2)$$

又由 $IB\parallel OK\parallel JC$，有 $\angle DAP=\angle BIA=\angle KOA$，$\angle PDA=\angle DJC=\angle DOK$，所以

$$\angle PAD+\angle ODP=\angle PAD+\angle DAO+\angle ODA+\angle ADP=\angle KOA+\angle ODP+\angle ODA+\angle DOK=180^\circ.$$

因此，P,A,O,D 四点共圆. 于是，连 OP，并结合 $IB\parallel OK\parallel JC$ 即知，$\angle KAO=\angle DPO$，$\angle KOA=\angle BIA=\angle DAP=\angle DOP$，所以，$\triangle OKA\backsim\triangle ODP$，由此，$\frac{OA}{OP}=\frac{AK}{PD}$，故有

$$OA\cdot PD=OP\cdot AK \qquad (3)$$

同理可得

$$OD\cdot PA=OP\cdot KD \qquad (4)$$

于是，$\frac{PA}{PD}=\frac{r_1}{r_2}\overset{\text{式(1)}}{\Leftrightarrow}\frac{PA}{PD}=\frac{OA}{OD}\Leftrightarrow OD\cdot PA=OA\cdot PD\overset{\text{由(3),(4)两式}}{\Leftrightarrow}OP\cdot AK=OP\cdot KD\Leftrightarrow AK=KD\overset{\text{由(2)式}}{\Leftrightarrow}AB=CD.$

定理2 设凸四边形 $ABCD$ 的两边 AB,CD 的延长线交于点 O，过 A,B 两点，过 C,D 两点，再过点 O 分别作的切线 OP,OQ，P,Q 为切点，且 OP,OQ 为 $\angle BOC$ 的两条等角线，则 $BC\parallel AD$ 的充分必要条件是两圆的根轴平分线段 PQ.

证明 由定理1，我们只需证明

$$BC\parallel AD\Leftrightarrow\frac{OP}{OQ}=\frac{r_1}{r_2}$$

事实上，如图8所示，设 $BC\parallel AD$，则有

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CD}$$

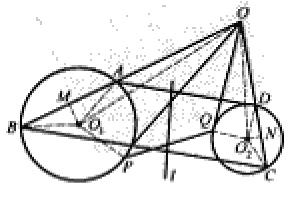


图8

又由圆幂定理，有 $OP^2 = OA \cdot OB$，$OQ^2 = OD$，所以

$$\frac{OP}{OQ} = \sqrt{\frac{OA \cdot OB}{OD \cdot OC}} = \frac{OA}{OD}$$

但 $\angle BOP = \angle COQ$，因此，连 PA,PB,QC,QD，则有 $\triangle OAP \backsim \triangle ODQ$，$\triangle OBP \backsim \triangle OCQ$，进而 $\triangle ABP \backsim \triangle DCQ$. 因两个相似三角形的外接圆半径之比等于相似比，故有

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{PA}{QD} = \frac{OP}{OQ}$$

反之，若$\frac{OP}{OQ} = \frac{r_1}{r_2}$，连 OO_1,OO_2,O_1P,O_2Q，则有 $\triangle OO_1P \backsim \triangle OO_2Q$，由此即知，$OO_1$ 与 OO_2 也是 $\angle BOC$ 的两条等角线，且$\frac{O_1O}{O_2O} = \frac{r_1}{r_2}$，于是，设 AB，CD 的中点分别为 M，N，则 $O_1M \perp AB$，$O_2N \perp CD$，从而 $\triangle OO_1M \backsim \triangle OO_2N$，所以

$$\frac{O_1M}{O_2N} = \frac{O_1O}{O_2O} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{O_1B}{O_2C}$$

由此即知 $\triangle O_1AB \backsim \triangle O_2DC$，因而有 $\angle O_1BA = \angle BAO_1 = \angle CDO_2 = \angle O_2CD$，由此便不难得到

$$\triangle OAO_1 \backsim \triangle ODO_2$$
$$\triangle OBO_1 \backsim \triangle OCO_2$$

于是，$\frac{OA}{OD} = \frac{O_1O}{O_2O} = \frac{OB}{OC}$，故 $BC \parallel AD$.

当两圆相切时，过切点的公切线即两圆的根轴；当两圆相交时，其公共弦所在直线即两圆的根轴. 于是，当两圆外切或相交时，我们在定理2的表述中便可避免使用根轴的概念.

特别地，当 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交，并且 $\odot O_1$ 与 CD 相切，$\odot O_2$ 与 AB 相切时，定理2即开头所述第五届中国数学奥林匹克试题，故定理2为其推广.

参考文献

[1] 数学奥林匹克题库编译小组. 中国中学生数学竞赛题解[M]. 天津：新蕾出版社，1991.
[2] 叶中豪. 问题征解及解答(71)[J]. 数学通讯，1993(4).
[3] JOHNSON R A. 近代欧氏几何学[M]. 单墫，译. 上海：上海教育出版社，1999.

完全四边形的性质再探

沈文选　刘洁　谢伟

（湖南师范大学数学系，湖南　长沙　410081）

摘　要：主要给出了完全四边形中凸四边形有内切圆，折四边形有旁切圆的结论.

关键词：完全四边形　内切圆　旁切圆

我们把两两相交又没有三线共点的四条直线及它们的6个交点所构成的图形，叫做完全四边形，6个点可分成三对相应的顶点，它们的连线是三条对角线.

我们已在文[1]中介绍了它的一系列性质，又在文[2]中给出了如下性质：

性质1　完全四边形的一条对角线被其他两条对角线调和分割.

在本文中，我们再介绍几条性质：

性质2　过完全四边形对角线所在直线的交点作另一条对角线的平行线，所作直线与平行对角线的同一端点所在的边（或其延长线）相交，所得线段被此对角线所在直线的交点平分.

证明　如图1，设 O,G,H 分别为完全四边形 $ABCDEF$ 的三条对角线所在直线的交点.

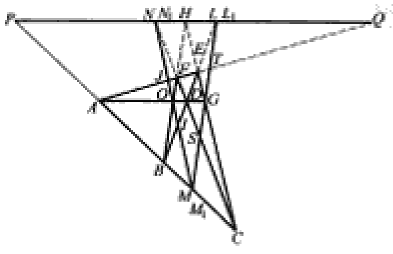


图1

ⅰ）过 O 作与 CE 平行的直线交 EB 于 I，交 EA 于 J，交 AC 于 M，与 CF 的延长线交于点 N，则需证 $OI=OJ$，$OM=ON$. 事实上，由性质1，有 $\frac{AO}{AG}=\frac{DO}{DG}$，又 $IJ\parallel CE$，则 $\frac{OI}{GE}=\frac{DO}{DG}=\frac{AO}{AG}=\frac{OJ}{GE}$

从而 $OI=OJ$，由 $MN\parallel CE$，则 $\frac{ON}{CG}=\frac{DO}{DG}=\frac{AO}{AG}=\frac{OM}{CG}$，从而 $OM=ON$.

ⅱ）过 G 作与 BF 平行的直线，交 FC 于 S，交 FE 的延长线于点 T，交 BE 的延长线于 L，交 BC 于 M_1. 同ⅰ）的证明一样，可得 $GS=GT$，$GM_1=GL$.

ⅲ）过点 H 作与 AD 平行的直线，交 CA 的延长线于点 P，交 AE 的延长线于点 Q，交 DF 的延长线于 N_1，交 DE 的延长线于 L_1.

同ⅰ）的证明，可得 $HN_1=HL_1$，$HP=HQ$.

综上，我们便完成了结论的证明.

由上述优美的性质，容易想到蝴蝶定理，在这里，我们不妨也把它称为完全四边形的蝴蝶定理.

性质3　在完全四边形 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABDF$（在 $\angle BAF$ 内）有旁切圆的充分必要条件是下列两条件之一：

(1) $AB+BD=AF+FD$；

(2) $AC+CD=AE+ED$

证明　(1) 必要性（略）

充分性：如图2，在射线 AB 上取点 K，使得 $BK=BD$，在射线 AF 上取点 L，使得 $FL=FD$.

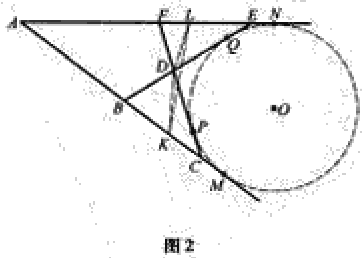


图2

连 DK,DL,KL，由 $AB+BD=AF+FD$，则 $AK=AB+BK=AB+BD=AF+FD=AF+FL=AL$. 从而 $\triangle BDK,\triangle FDL,\triangle AKL$ 均为等腰三角形. 设点 O 为 $\triangle DLK$ 的外心，易知 OB,OF,OA 分别为 $\triangle DLK$ 的三

边 DK,DL,KL 的中垂线，即它们分别是 $\angle DBC$，$\angle DFE$，$\angle EAC$ 的平分线，则点 O 到四边形 $ABDF$ 各边的距离相等，即知四边形 $ABDF$（在 $\angle BAF$ 内）有旁切圆，圆心为 O.

（2）必要性：设旁切圆与四边形分别相切于点 M,P,Q,N.

则 $AM = AN, EQ = EN, DP = DQ$，故

$$AC + CD = AC + CP + PD = AM + PD = AN + DQ = AE + EN + DQ = AE + EQ + QD = AE + ED$$

充分性：类似于（1）而证（略）.

性质 4 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABDF$ 有内切圆的充分必要条件是下列两条件之一：

（1）$BC + BE = FC + FE$；

（2）$AC + DE = AE + CD$；

证明 （1）充分性，如图 3：在 CF 上截取 $CG = CB$，在 EA 上截取 $EH = EB$，连 BG,GH,BH，则 $FH = EH - EF = EB - EF$，又 $BC + BE = FC + FE$，则 $BE - FE = FC - BC$，故

$$FH = FC - BC = FC - CG = GF$$

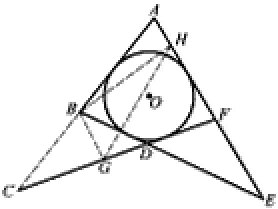


图 3

分别作 $\angle BCG$，$\angle BEH$，$\angle GFH$ 的平分线.

因为 $CB = CG, EB = EH, FG = FH$，所以这三个角的平分线所在的直线就是 $\triangle BGH$ 三边的垂直平分线，从而，这三个角的平分线交于一点，设为 I.

由角平分线的性质知，I 到 CB 与 CF，EB 与 EF，FC 与 FA 的距离均相等，即 I 到四边形 $ABDF$ 的四边距离相等，所以，四边形 $ABDF$ 有内切圆，且 I 为其内切圆的圆心.

必要性（略）.

（2）充分性：在 AC 上截取 $CG = CD$，在 AE 上截取 $EH = ED$，则 $AG = AC - CG = AC - CD = AE - DE = AE - EH = AH$，则 $\angle DCG$，$\angle DEH$，$\angle GAH$ 的平分线就是 $\triangle DGH$ 的三边的中垂线. 同（1）知四边形 $ABDF$ 有内切圆.

必要性（略）.

性质 5 在完全四边形 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABDF$ 有内切圆的充分必要条件是 $\triangle ACD$ 与 $\triangle ADE$ 的内切圆相外切.

证明 必要性：当四边形 $ABDF$ 有内切圆 $\odot I$ 时，设 $\odot I$ 分别切 BD,DF 于点 M,N，设 $\triangle ACD$ 的内切圆 $\odot I_1$ 切 CD 于点 P，$\triangle ADE$ 的内切圆 $\odot I_2$ 切 DE 于点 Q，如图 4.

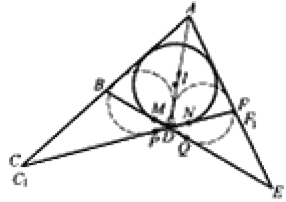


图 4

$$PN = CN - CP = \frac{1}{2}(AC + CF - AF) - \frac{1}{2}(AC + CD - AD) = \frac{1}{2}(AD + DF - AF)$$

同理，$QM = \frac{1}{2}(AD + DB - AB)$. 由四边形 $ABDF$ 有内切圆，知 $DF - AF = DB - AB$，于是 $PN = QM$. 再由 $DN = DM$，可知 $DP = DQ$. 从而 $\odot I_1$ 与 $\odot I_2$ 外切于 AD 上某一点.

充分性：设 $\triangle ACD$ 的内切圆 $\odot I_1$ 与 $\triangle ADE$ 的内切圆 $\odot I_2$ 外切于 AD 上一点，作 $\triangle AEB$ 的内切圆 $\odot I$，过 D 作 $\odot I$ 的另一切线分别交直线 AB 于 C_1，交直线 AE 于 F_1，作 $\triangle AC_1D$ 的内切圆 $\odot I'_1$，则由前面的证明可知 $\odot I'_1$ 与 $\odot I_2$ 外切于 AD 上一点，再由 $\odot I'_1$ 与 $\odot I_1$ 的圆心同在 $\angle CAD$ 的平分线上，知 $\odot I'_1$ 与 $\odot I_1$ 重合. 从而 C_1 与 C 重合，F_1 与 F 重合. 因此，四边形 $ABDF$ 有内切圆.

注：性质 2 是我们看到《数学教学》2006 年第 8 期上的问题 681 号后进行推广所得结论. 此后，据友人介绍，这是一个古典结果，单墫教授曾于 20 世纪 80 年代初期在《数学通讯》上介绍过，见[3]，并且 2001 年被伊朗作为他们国家的数学奥林匹克试题. 性质 3，4 是在研究 2006 年全国高中数学联赛时得到的. 性质 5 是在 1999 年保加利亚数学奥林匹克基础上改编的.

参考文献

[1] 沈文选. 完全四边形的优美性质[J]. 中等数学, 2006(8):17-21.

[2] 沈文选. 完全四边形的一条性质及应用[J]. 中学数学, 2006(1):44-45.

[3] 单墫. 两个最初等的几何定理[J]. 数学通讯, 1981(4).

三角形旁心的一个性质

曾建国

（赣南师范学院数学与计算机科学学院，江西　赣州　341000）

摘　要：将三角形内心的一个性质移植到了三角形的旁心.

关键词：三角形　旁心　有向面积　有向距离

三角形的内心有下面的性质[1]：经过三角形内心的直线把三角形的周长和面积分成相同的比. 即有：

命题　如图1所示，若一条直线经过 $\triangle ABC$ 的内心且与边 AB，AC 分别交于 M，N，则有

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\text{四边形}MBCN}}=\frac{AM+NA}{MB+BC+CN}$$

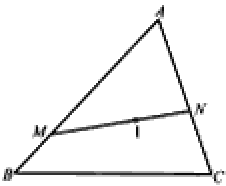


图 1

本文拟将这一性质移植至三角形的旁心.

由于经过三角形旁心的直线与三角形的边的交点可能在边上、也可能在边的延长线上，因此，我们需要引入有向距离等概念并对三角形边上的有向线段的方向和数量作出有关规定.

定义[2]　从点 C 向有向直线 $\overline{AB}$ 引垂线交 $\overline{AB}$ 于 D，设有向线段 $\overline{CD}$ 的数量为 d，则称 d 为点 C 到有向直线 $\overline{AB}$ 的有向距离（如图2所示）. 当点 C 位于 $\overline{AB}$ 所指方向的左侧时，$d>0$；当点 C 位于 $\overline{AB}$ 所指方向的右侧时，$d<0$；当点 C 位于直线 $\overline{AB}$ 上时，$d=0$.

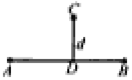


图 2

记 $\triangle ABC$ 的有向面积[2] 为 $\overline{\triangle}ABC$，设点 C 到 $\overline{AB}$ 的有向距离为 d，根据有向距离及有向面积的定义可知有以下等式成立[2]

$$\overline{\triangle}ABC=\frac{1}{2}|AB|\cdot d \tag{1}$$

对于平面内任意一点 O，记 $\triangle ABC$ 和四边形 $MNPQ$ 的有向面积[2] 分别为 $\overline{\triangle}ABC$ 和 $\overline{\triangle}MNPQ$，由文[2]可知

$$\overline{\triangle}ABC=\overline{\triangle}OAB+\overline{\triangle}OBC+\overline{\triangle}OCA \tag{2}$$

$$\overline{\triangle}MNPQ=\overline{\triangle}OMN+\overline{\triangle}ONP+\overline{\triangle}OPQ+\overline{\triangle}OQM \tag{3}$$

我们对 $\triangle ABC$ 的各边所在直线上的有向线段（简称为 $\triangle ABC$ 的有向线段）$\overline{PQ}$ 的方向及数量作如下规定：

设 $\triangle ABC$ 的绕向为 $A\to B\to C\to A$，当 $\overline{PQ}$ 的方向与 $\triangle ABC$ 的绕向相同时，$\overline{PQ}$ 为正向，其数量为正数；当 $\overline{PQ}$ 的方向与 $\triangle ABC$ 的绕向相反时，$\overline{PQ}$ 为负向，其数量为负数.

在这一规定下，$\triangle ABC$ 的有向线段 $\overline{PQ}$ 的数量仍记为 $\overline{PQ}$. 则当 $\overline{PQ}$ 为正向线段时，$\overline{PQ}=|PQ|$；当 $\overline{PQ}$ 为负向线段时，$\overline{PQ}=-|PQ|$.

不失一般性，我们约定：以下所讨论的 $\triangle ABC$ 的绕向均为逆时针方向.

定理1　在 $\triangle ABC$ 中，设 I_1 是与边 BC 相切的旁切圆圆心，过 I_1 任作一直线 l：

（1）若直线 l 与直线 AB，AC 分别交于点 M，N，则有

$$\frac{\overline{\triangle}AMN}{\overline{\triangle}MBCN}=\frac{\overline{AM}+\overline{NA}}{\overline{MB}-\overline{BC}+\overline{CN}}$$

（2）若直线 l 与直线 BC，BA 分别交于点 M，N，则有

$$\frac{\overline{\triangle}BMN}{\overline{\triangle}MCAN}=\frac{-\overline{BM}+\overline{NB}}{-\overline{MC}+\overline{CA}+\overline{AN}}$$

（3）若直线 l 与直线 CA，CB 分别交于点 M，N，则有

$$\frac{\overline{\triangle}CMN}{\overline{\triangle}MABN}=\frac{\overline{CM}-\overline{NC}}{\overline{MA}+\overline{AB}-\overline{BN}}$$

证明 (1) 如图3所示，设旁切圆 $\odot I_1$ 的半径为 r_1。根据定义，由图3容易看出，旁心 I_1 到 $\overline{AB},\overline{BC},\overline{CA}$ 有向距离依次为 $r_1,-r_1,r_1$。设 M 在 BA 的延长线上，N 在 AC 边上(其他情形同理可证)。

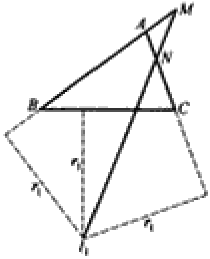


图3

根据公式 (1)、(2)、(3)，并注意到 $\overline{\triangle}I_1MN=0$，$\overline{AM},\overline{AN}$ 均为 $\triangle ABC$ 的负向线段，可得

$\overline{\triangle}AMN=\overline{\triangle}I_1AM+\overline{\triangle}I_1NA=$

$\frac{1}{2}|AM|\cdot(-r_1)+\frac{1}{2}|NA|\cdot r_1=$

$\frac{1}{2}(-|AM|+|NA|)\cdot r_1=$

$\frac{1}{2}(\overline{AM}+\overline{NA})\cdot r_1$

同理有

$\overline{\triangle}MBCN=\overline{\triangle}I_1MB+\overline{\triangle}I_1BC+\overline{\triangle}I_1CN=$

$\frac{1}{2}|MB|\cdot r_1+\frac{1}{2}|BC|\cdot(-r_1)+\frac{1}{2}|CN|\cdot r=$

$\frac{1}{2}(\overline{MB}-\overline{BC}+\overline{CN})\cdot r_1$

故

$$\frac{\overline{\triangle}AMN}{\overline{\triangle}MBCN}=\frac{\overline{AM}+\overline{NA}}{\overline{MB}-\overline{BC}+\overline{CN}}$$

用完全类似的方法可以证明(2) 和(3)。

注：在定理1中，当直线 l 恰过 $\triangle ABC$ 的某一顶点时，M,N 重合为一点，此时直线 l 将 $\triangle ABC$ 的周长及面积分成的比均等于0，结论仍成立。

定理1的逆命题也成立，即有

定理2 在 $\triangle ABC$ 中，设 I_1 是与边 BC 相切的旁切圆圆心，l 是平面内任一直线，当满足下列条件之一时，直线 l 必经过 $\triangle ABC$ 的旁心 I_1。

(1) 直线 l 与边 AB,AC 或其延长线分别交于相异的两点 M,N，且有

$$\frac{\overline{\triangle}AMN}{\overline{\triangle}MBCN}=\frac{\overline{AM}+\overline{NA}}{\overline{MB}-\overline{BC}+\overline{CN}}$$

(2) 直线 l 与边 BC,BA 或其延长线分别交于相异的两点 M,N，且有

$$\frac{\overline{\triangle}BMN}{\overline{\triangle}MCAN}=\frac{-\overline{BM}+\overline{NB}}{-\overline{MC}+\overline{CA}+\overline{AN}}$$

(3) 直线 l 与边 CA,CB 或其延长线分别交于相异的两点 M,N，且有

$$\frac{\overline{\triangle}CMN}{\overline{\triangle}MABN}=\frac{\overline{CM}-\overline{NC}}{\overline{MA}+\overline{AB}-\overline{BN}}$$

证明 (1)、(2)、(3) 的证法类似，下面只证明(1)。

如图4所示，设旁切圆 I_1 的半径为 r_1，设交点 M 在 AB 边上、N 在 AC 的延长线上(其他情形同理可证)。

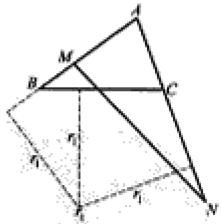


图4

在图4中，因为 $\overline{AM},\overline{NA}$ 均为 $\triangle ABC$ 的正向线段，且点 I_1 均在其左侧，所以参照定理1的证明过程同理可得

$\overline{\triangle}AMN=\overline{\triangle}I_1AM+\overline{\triangle}I_1MN+\overline{\triangle}I_1NA=$

$\frac{1}{2}|AM|\cdot r_1+\frac{1}{2}|NA|\cdot r_1+\overline{\triangle}I_1MN=$

$$\frac{1}{2}(\overline{AM}+\overline{NA})\cdot r_1+\overline{\triangle}I_1MN \quad (4)$$

$\overline{\triangle}MBCN=\overline{\triangle}I_1MB+\overline{\triangle}I_1BC+\overline{\triangle}I_1CN+\overline{\triangle}I_1NM=$

$\frac{1}{2}|MB|\cdot r_1+\frac{1}{2}|BC|\cdot(-r_1)+$

$\frac{1}{2}|CN|\cdot(-r_1)+\overline{\triangle}I_1NM=$

$$\frac{1}{2}(\overline{MB}-\overline{BC}+\overline{CN})\cdot r_1+\overline{\triangle}I_1NM \quad (5)$$

令 $\overline{AM}+\overline{NA}=c_1$，$\overline{MB}-\overline{BC}+\overline{CN}=c_2$，依题设知

$$\frac{\overline{\triangle}AMN}{\overline{\triangle}MBCN}=\frac{c_1}{c_2} \quad (6)$$

将式(4)、(5) 代入式(6) 并注意到

$$\overline{\triangle}I_1NM = -\overline{\triangle}I_1MN$$

可得

$$\frac{\frac{1}{2}c_1r_1 + \overline{\triangle}I_1MN}{\frac{1}{2}c_2r_1 - \overline{\triangle}I_1MN} = \frac{c_1}{c_2}$$

化简可得

$$(c_1 + c_2)\cdot\overline{\triangle}I_1MN = 0 \tag{7}$$

不难证明 $c_1 + c_2 \neq 0$. 事实上，若 $c_1 + c_2 = 0$，即 $\overline{AM} + \overline{NA} + \overline{MB} - \overline{BC} + \overline{CN} = 0$，则

$$\overline{AM} + \overline{MB} + \overline{CN} + \overline{NA} = \overline{BC} \tag{8}$$

注意到 M 是直线 AB 上的点，因此有 $\overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB}$，同理有 $\overline{CN} + \overline{NA} = \overline{CA}$. 因而式(8)可写成

$$\overline{AB} + \overline{CA} = \overline{BC} \tag{9}$$

由于 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 均为 $\triangle ABC$ 的正向线段，其数量为正数，就等于该线段的长度. 因此式(9)就是 $|AB| + |CA| = |BC|$，这与"三角形两边之和大于第三边"矛盾. 所以 $c_1 + c_2 \neq 0$.

由式(7)可知 $\overline{\triangle}I_1MN = 0$. 表明 M，N，I_1 三点共线，即直线 l 经过 $\triangle ABC$ 的旁心 I_1. 命题得证.

参考文献

[1] B・B・波拉索洛夫. 平面几何问题集及其解答[M]. 周春荔，张同君，等，译. 长春：东北师范大学出版社，1998.

[2] 熊曾润. 平面闭折线的有向面积及其应用[J]. 数学通报，2002(6).

三角形心的位似变换

陈丽英
(福州市第二十四中学,福建　福州　350001)

摘　要:本文通过 P,Q 两点关于以三角形重心 G 为位似中心的位似变换的研究,得到了点 P,G,Q 三点共线,且 $(k+3)\cdot QG=2k\cdot GP$,其中 k 为位似比,此结论为欧拉定理的推广. 当 $k=1$ 时,就得到欧拉线及众多类欧拉线,若赋予 k 的数值,又可以得到许多组共线点.

关键词:位似变换　重心　欧拉线　类欧拉线

定义1　设点 P,O,P' 三点共线,且 $\frac{OP'}{OP}=k$ (k 为实数),则称点 P' 与点 P 关于点 O 为位似变换点,位似比为 k,如图1所示.



图1

定义2　设点 P 为 $\triangle ABC$ 所在的平面上的一个点,点 P 关于三边 BC,CA,AB 中点的位似比为 k 的位似变换点分别为 A',B',C',点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,则:

(1) AA',BB',CC' 相交于一点 Q;

(2) 点 P,G,Q 三点共线,且 $(k+3)\cdot QG=2k\cdot GP$.

证明　(1) 辅助线如图2($k>0$).

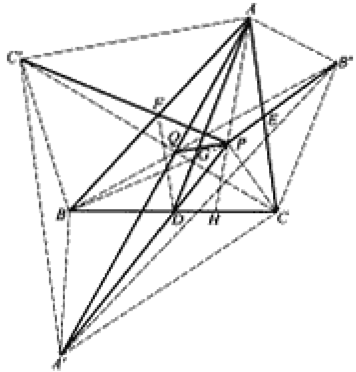


图2

由于 D,E,F 分别是 BC,CA,AB 的中点,可知 $AC=2FD$,$AC\parallel FD$. 因为 $\frac{C'F}{PF}=\frac{A'D}{PD}=k$,故 $FD\parallel C'A'$,$\frac{FD}{A'C'}=\frac{1}{k+1}$. 但 $AC\parallel C'A'$,可得 $\triangle QC'A'\backsim\triangle QAC$. 所以 $\frac{AC}{A'C'}=\frac{QA}{QA'}=\frac{CQ}{C'Q}=\frac{2}{k+1}$. 那么 CC' 经过 AA' 上的点 Q,其中 $\frac{AQ}{QA'}=\frac{2}{k+1}$.

同理,BB' 经过 AA' 上的点 Q,其中 $\frac{AQ}{QA'}=\frac{2}{k+1}$. 所以 AA',BB',CC' 相交于一点 Q.

(2) 连结 PQ 交 $\triangle ABC$ 的中线 AD 于 G. 在 $\triangle AA'D$ 中,根据 Menelaus 定理,有 $\frac{PA'}{PD}\cdot\frac{GD}{GA}\cdot\frac{QA}{QA'}=1$,因为 $\frac{PA'}{PD}=\frac{k+1}{1}$,$\frac{QA}{QA'}=\frac{2}{k+1}$,则 $\frac{k+1}{1}\cdot\frac{GD}{GA}\cdot\frac{2}{k+1}=1$. 所以 $\frac{GD}{GA}=\frac{1}{2}$,故 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

另一方面,在 $\triangle PQA'$ 中,根据 Menelaus 定理,有 $\frac{GP}{GQ}\cdot\frac{DP}{DA'}\cdot\frac{AA'}{AQ}=1$,而 $\frac{AQ}{AA'}=\frac{2}{k+3}$,$\frac{A'D}{PD}=\frac{2}{1}$,所以 $\frac{GQ}{GP}=\frac{DA'}{DP}\cdot\frac{AQ}{AA'}=\frac{k}{1}\cdot\frac{2}{k+3}$. 则 $(k+3)\cdot QG=2k\cdot GP$. 同理,当 k 为负数时,结论成立.

应用定理1,我们可以寻求以重心 G 为中心的共线点,当 $k=1$ 时,我们有:

推论1　(欧拉定理):三角形的外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线,且 $2OG=GH$.

证明　如图3,分别作垂心 H 关于 $\triangle ABC$ 三边中点的中心对称点($k=1$)A',B',C',连结 AA',BB' 相交于 O,连结 OH 交中线 AD 于 G,其余辅助线如图3所示,显然四边形 $C'BHA,AHCB',C'B'CB$ 是平行四边形,由于 $AH\perp BC$,$AH\parallel B'C$,则 $B'C\perp BC$,所以四边

形 $C'B'CB$ 是矩形，可知 $OB = OC$. 同理 $OC = OA$，O 为 $\triangle ABC$ 的外心. 因为 $OB = OB'$，$DB = DC$，所以 $OD = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}AH$，由 $\triangle OGD \backsim \triangle AHG$ 可得 $AG = 2GD$，所以 G 是 $\triangle ABC$ 的重心且 $GH = 2OG$.

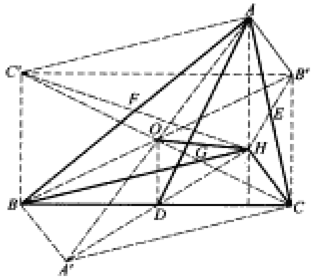


图 3

同理可知：

推论 2 三角形的内心 I、重心 G、界心 N 三点共线，且 $2IG = GN$.

推论 3 三角形的陪位重心 G'、重心 G、伪垂心 H' 三点共线，且 $2OG' = GH'$.

推论 4 三角形的仿葛尔刚点 In、重心 G、葛尔刚点 Gr 三点共线，且 $2InG = GGr$.

在全国第六届初等数学研究学术交流会上，黄华松、万劲松老师提出了"等和点"的定义：在 $\triangle ABC$ 所在平面内，满足 $PA + BC = PB + AC = PC + AB$ 的点 P 叫做等和点，引起了数学爱好者的兴趣和关切.

定义 3 设 D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 的中点，P' 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的点，且满足 $P'D + \frac{1}{2}BC = P'E + \frac{1}{2}AC = P'F + \frac{1}{2}AB$，则点 P' 叫做"伴等和点".

推论 5 三角形的等和点 P、重心 G、伴等和点 P' 三点共线，且 $2P'G = GP$.

证明 如图 4，分别作等和点 P 关于 $\triangle ABC$ 三边中点的中心对称点 A', B', C'，连结 AA', BB' 相交于 P'，连结 $P'P$ 交中线 AD 于 G，其余辅助线如图 4 所示，显然四边形 $C'BPA$，$APCB'$，$BC'B'C$ 是平行四边形，则 $B'C = AP$，$PC = AB'$，P' 是 BB' 的中点，由于 D, F 分别是 BC, BA 的中点，所以 $P'D = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}PA$，$P'F = \frac{1}{2}AB' = \frac{1}{2}PC$. 由于点 P 是 $\triangle ABC$ 的等和点，则 $PA + BC = PC + AB$，所以 $B'C + BC = AB' + AB$，可知 $\frac{1}{2}B'C + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB' + \frac{1}{2}AB$，即 $P'D + \frac{1}{2}BC = P'F + \frac{1}{2}AB$. 同理 $P'D + \frac{1}{2}BC = P'E + \frac{1}{2}AC = P'F + \frac{1}{2}AB$. 所以点 P' 是 $\triangle ABC$ 的伴等和点. 因为 $AP \parallel B'C' \parallel P'D$，所以 $\frac{PG}{GP'} = \frac{AP}{P'D} = \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$. 所以 G 是 $\triangle ABC$ 的重心且 $PG = 2GP'$.

这是我们新发现的第四条类欧拉线.

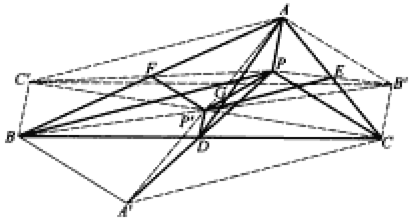


图 4

当 $k = -1$ 时，我们有：

推论 6 三角形的外心 O、重心 G、九点圆的圆心 N 三点共线，且 $OG = 2GN$.

当 $k = 3$ 时，我们有：

推论 7 三角形的折心 Z、重心 G、内心 I 三点共线，且 $ZG = GI$.

证明 略.

参考文献

[1] 过伯祥. 三角形几何学的新方法与成果 —— 论共轭点、共线点与一些几何不等式[C] // 中国初等数学研究文集. 郑州：河南教育出版社：612-631.

[2] 林世保. 新发现的一条类欧拉线[J]. 中学数学，2000(4)：36.

[3] 林世保. 三角形"1 号"心的性质[J]. 福建中学数学，2007(2)：19.

[4] 熊曾润. 三角形的 1 号心及其性质[J]. 福建中学数学，2002(10)：16.

[5] 洪凰翔. 三角形某些"伴心"的性质[J]. 中学数学，2001(4)：37-38.

欧拉定理的推广

林世保

（福州市第二十四中学，福建　福州　350001）

摘　要：本文给出类欧拉线的共线点的重心坐标，推广了欧拉定理，根据此结论，找到了新的欧拉线：三角形的仿葛尔刚点 In、重心 G、葛尔刚点 Gr 三点共线，且 $2InG = GGr$.

关键词：重心坐标　欧拉定理　特殊点　欧拉共线点　类欧拉线

定义　若三角形的两个特殊点 X,Y 与重心 G 共线，且 X,Y 位于重心 G 两旁，$2XG = GY$，则称点 X,Y 为欧拉共线点.

定理　若点 X 与点 Y 的重心坐标[1] 分别为 (x,y,z)、$(-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$，则点 X,Y 为欧拉共线点.

为了证明定理，先给出下面引理：

引理　设点 Y 为 $\triangle ABC$ 所在平面上一个点，D',E',F' 分别为点 Y 关于边 BC,CA,AB 的中点的对称点，则 AD',BE',CF' 必交于一点 X，且点 X,Y 为欧拉共线点.

证明　辅助线如图 1 所示，由点对称的概念易知四边形 $ACD'F'$，$BCE'F'$，$ABD'E'$ 分别是平行四边形，则 CF'，BE' 分别经过 AD' 的中点 X，所以 AD'，BE'，CF' 相交于一点（X）.

如图 2，连结 XY 交 $\triangle ABC$ 的中线 AD 于 G，连结 XD，先证明 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 因为 X 为 BE' 的中点，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，根据中位线定理，有

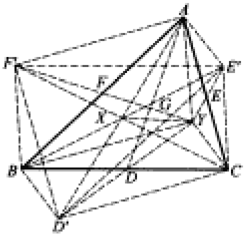


图 1

$$XD = \frac{1}{2}E'C, XD \parallel E'C$$

由于 $AY = E'C, AY \parallel E'C$，可知 $XD = \frac{1}{2}AY$，$XD \parallel AY$，所以 $\triangle XDG \backsim \triangle YAG$，故 $\frac{DG}{GA} = \frac{XD}{AY} = \frac{1}{2}$，于是 G 为 $\triangle ABC$ 的重心. 又因为 $\frac{XG}{GY} = \frac{XD}{AY} = \frac{1}{2}$，可得 $2XG = GY$. 所以点 X,Y 为欧拉共线点.

定理证明　如图 2，设 $BC = a$，AX,AY 的延长线与 BC 分别交于点 M,N，CX 的延长线交 AB 于 P，连结 XY 交 $\triangle ABC$ 的中线 AD 于 G，连结 XD，由于 X,Y 的重心坐标分别为

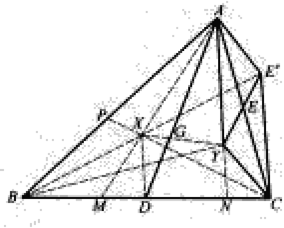


图 2

$$X(x,y,z)$$

$$Y(-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$$

由于 $\frac{BM}{MC} = \frac{z}{y}$，$\frac{PA}{PB} = \frac{y}{x}$，$\frac{CN}{BN} = \frac{x+y-z}{x-y+z}$，可知 $BM = \frac{z}{z+y}a$，$CN = \frac{x-y+z}{2x}a$.

在 $\triangle ABM$ 中，根据 Menelaus 定理，有 $\frac{XA}{XM} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{PB}{PA} = 1$，则 $\frac{XA}{XM} = \frac{CB}{CM} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{a}{a-BM} \cdot \frac{y}{x} = \frac{z+y}{z+y-z} \cdot \frac{y}{x} = \frac{z+y}{x}$，故 $\frac{XM}{AM} = \frac{x}{x+y+z}$.

在 $\triangle ACN$ 中，由点 Y 的重心坐标，再应用 Menelaus 定理，同理可得 $\frac{AN}{AY} = \frac{x+y+z}{2x}$. 另一方面，$\frac{DN}{DM} =$

$$\frac{DC-NC}{BD-BM}=\frac{\frac{1}{2}a-\frac{x-y+z}{2x}a}{\frac{1}{2}a-\frac{z}{z+y}a}=\frac{1-\frac{x-y+z}{x}}{1-\frac{2z}{z+y}}=$$

$\frac{(z+y)(x-x+y-z)}{x(z+y-2z)}=\frac{z+y}{x}=\frac{AX}{XM}$，所以 $XD\,//\,AN$，可知$\frac{XD}{AN}=\frac{XM}{AM}=\frac{x}{x+y+z}$，因此 $XD=\frac{x}{x+y+z}\cdot AN$，于是$\frac{XD}{AY}=\frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{AN}{AY}=\frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{x+y+z}{2x}=\frac{1}{2}$，所以$\frac{GD}{GA}=\frac{XD}{XA}=\frac{1}{2}=\frac{XG}{GY}$ 故 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，且 $2GX=GY$. 所以点$\{x,y,z\}$与点$\{-x+y+z,x-y+z,x+y-z\}$为欧拉共线点.

推论1 （欧拉定理）三角形的外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，且 $2OG=GH$.

证明 由于外心的重心坐标为 $O\{a^2x_a,b^2x_b,c^2x_c\}$，其中 $x_a=-a^2+b^2+c^2$，$x_b=a^2-b^2+c^2$，$x_c=a^2+b^2-c^2$（下同），根据定理，它的欧拉共线点的重心坐标是$\{-a^2x_a+b^2x_b+c^2x_c,a^2x_a-b^2x_b+c^2x_c,a^2x_a+b^2x_b-c^2x_c\}$. 而

$$-a^2x_a+b^2x_b+c^2x_c=-a^2(-a^2+b^2+c^2)+b^2(a^2-b^2+c^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)=a^4-a^2b^2-a^2c^2+a^2b^2-b^4+b^2c^2+c^2a^2+c^2b^2-c^4=x_bx_c$$

同理 $a^2x_a-b^2x_b+c^2x_c=x_ax_c$，$a^2x_a+b^2x_b-c^2x_c=x_ax_b$. 所以外心的欧拉共线点的重心坐标为$\{x_cx_b,x_ax_c,x_bx_a\}$.

由重心坐标是一种齐次坐标，故 $X\{a,b,c\}\Leftrightarrow X\{na,nb,nc\}(n\neq 0)$，因此外心的欧拉共线点的重心坐标为$\left\{\frac{1}{x_a},\frac{1}{x_b},\frac{1}{x_c}\right\}$，就是 $\triangle ABC$ 的垂心的重心坐标，故三角形的外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，且 $2OG=GH$.

下面给出四个三角形的有关特殊点的重心坐标：

内心 $I\{a,b,c\}$、界心（Nagel 奈格点）$N\{p-a,p-b,p-c\}$；

陪位重心：$G'\{a^2,b^2,c^2\}$、伪垂心 $H'\{x_a,x_b,x_c\}$.

通过它们的重心坐标的观察或计算，不难得出两条类欧拉线.

推论2 三角形的内心 I、重心 G、界心 N 三点共线，且 $2IG=GN$.

推论3[2] 三角形的陪位重心 G'、重心 G、伪垂心 H' 三点共线，且 $2OG'=GH'$.

我们知道，葛尔刚点（Gergonne 点）的重心坐标为 $Gr\left\{\frac{1}{p-a},\frac{1}{p-b},\frac{1}{p-c}\right\}$，根据定理，易求它的欧拉共线点的重心坐标为$\{a(p-a),b(p-b),c(p-c)\}$.

文[1]在论述"重心坐标"的同时，一口气给出了二十多条三角形特殊点的共点线，提到的尚未被人们发现的一个新点 In，其重心坐标为$\{a(p-a),b(p-b),c(p-c)\}$，该点就是本文提到的葛尔刚点的欧拉共线点. 我们把这个新点 In 称为仿葛尔刚点[3]，因此，有：

推论4 三角形的仿葛尔刚点 In、重心 G、葛尔刚点 Gr 三点共线，且 $2InG=GGr$.

推理4中的这条共点线是文[1]在诸多共点线中未提到的，由此我们又找到了新发现的一条类欧拉线.

参考文献

[1] 林世保. 新发现的一条类欧拉线[J]. 中学数学，2000(4).

[2] 洪凰翔. 三角形某些"伴心"的性质[J]. 中学数学，2001(4).

[3] 王不直. 欧拉定理的推广[J]. 中学数学，1997(1).

三角形的“等差点”初探

黄华松　　黄光文　　王志勇

（湖北省鄂州市第二中学，湖北　　鄂州　　436001）

由文[1]知，$\triangle ABC$所在平面内，满足$PA+a=PB+b=PC+c$的点P叫$\triangle ABC$的等和点（这里a，b，c为$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$的对边，下同）。那么，满足$|PA-a|=|PB-b|=|PC-c|$的点P是否存在？若存在，有什么性质？怎样用尺规作出该点？本文将探讨这些问题.

定义　$\triangle ABC$所在平面内，满足$|PA-a|=|PB-b|=|PC-c|$的点P叫$\triangle ABC$的等差点. 显然，该点包括满足：ⅰ）$PA-a=PB-b=PC-c$的点；ⅱ）$PA-a=b-PB=PC-c$或$PA-a=PB-b=c-PC$或$a-PA=PB-b=PC-c$之一的点.

为方便表述，特作如下规定：① $PA-a=b-PB=PC-c$，记作式(1). ② 开区域：$\triangle ABC$中，由边AC与边BA，BC的延长线围成的区域叫边b外开区域，记作K_b. 同样，由BC边与边AC，AB延长线围成的区域、由边AB与CA，CB延长线围成的区域分别叫边a外开区域、边c外开区域，分别记作K_a，K_c.

现在说明：$\triangle ABC$中，满足ⅰ）的点P并不总是存在. 易知，对$\triangle ABC$，分别以三个顶点为圆心而又两两外切的三个圆有且仅有三个. 若P满足ⅰ），设$PA-a=PB-b=PC-c=t$，延长PA到M，PB到N，PC到K，使$AM=\frac{1}{2}(b+c-a)$，$BN=\frac{1}{2}(a+c-b)$，$CK=\frac{1}{2}(a+b-c)$，则$PM=t+a+AM=t+\frac{1}{2}(a+b+c)$，同理$PN=PK=t+\frac{1}{2}(a+b+c)$，这样$\odot A(AM)$，$\odot B(BN)$，$\odot C(CK)$两两外切，$\odot P(PM)$与$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$均内切. 这就是说，$\triangle ABC$中，如果满足ⅰ）的$P$存在，则必存在一圆与两两外切的$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$均内切. 然而，当$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$两两外切，但$\odot C$半径很小时，不可能作出与该三圆均内切的圆，此时$\triangle ABC$就不存在满足ⅰ）的等差点$P$.

对于满足ⅱ）的点，不妨只讨论满足式(1)的情形. 图1，设$\triangle ABC$的边b外的旁切圆切BC于E，AC于F，AB于D，作$\odot A(AD)$，$\odot B(BD)$，$\odot C(CE)$，此时，$\odot A$与$\odot C$外切，它们与$\odot B$均内切. 显然，$\odot A$，$\odot B$，$\odot C$公切圆有两个，记为$\odot P_1$，$\odot P_2$，易证$P_1A-a=r_1+r_A+r_C-r_B=b-P_1B=P_1C-c$，故$P_1$满足式(1)，同理$P_2$满足式(1)，故$\triangle ABC$满足式(1)的等差点至少有两个. 显然$P_1$，$P_2$中有一个位于$K_b$内.

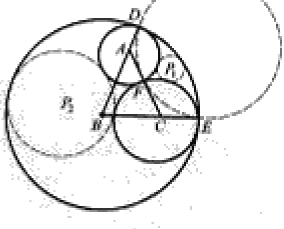


图1

1. 定理

图2，$\triangle ABC$中，边b外开区域K_b内存在唯一满足$PA-a=b-PB=PC-c$的等差点，该点是与边b外旁切圆$\odot I$分别内切于$\odot I$在三边切点而又两两外切三个圆的三条内公切线的交点. 先证5条引理.

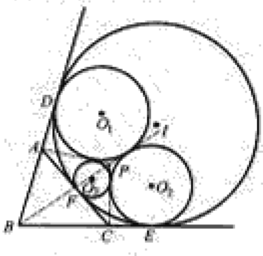


图2

为方便表述，把“$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$两两外切，且与$\triangle ABC$的边b外的旁切圆$\odot I$分别内切于$\odot I$在三边上的切点”记为M.

引理1 $\triangle ABC$ 有且仅有三个圆 $\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3$ 满足条件 M.

证明 图3,设 $\odot I(r)$ 是边 b 外旁切圆,切 AB,BC,AC 于 D,E,F. 设 $\odot O_1(r_1)$,$\odot O_2(r_2)$,$\odot O_3(r_3)$ 分别内切 $\odot I$ 于 D,E,F,又两两外切. 下文中令 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三内角,$\cot(\frac{A}{2})=u$, $\tan(\frac{B}{2})=v$, $\cot(\frac{C}{2})=w$.

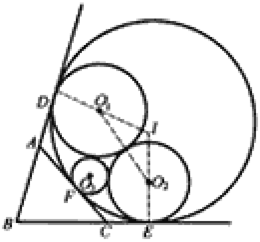


图3

在 $\triangle IO_1O_2$ 中

$$(r-r_1)^2+(r-r_2)^2+2(r-r_1)(r-r_2)\cos B=(r_1+r_2)^2 \qquad (2)$$

整理得

$$r^2-(r_1+r_2)r-r_1r_2v^2=0 \qquad (3)$$

在 $\triangle IO_1O_3$ 中

$$(r-r_1)^2+(r-r_3)^2-2(r-r_1)(r-r_3)\cos A=(r_1+r_3)^2$$

整理得

$$r^2-(r_1+r_3)r-r_1r_3u^2=0 \qquad (4)$$

同理

$$r^2-(r_2+r_3)r-r_2r_3w^2=0 \qquad (5)$$

由式(4)、(5)得

$$r_1=r(r-r_3)(r+r_3u^2)^{-1}$$

$$r_2=r(r-r_3)(r+r_3w^2)^{-1}$$

代入式(3)整理配方得

$$(1+v^2)(2rr_3-r^2)+r_3^2[(u+w)^2+(uw-1)^2-(1+v^2)]=0$$

由和角余切公式有

$$(uw-1)=(u+w)\cot[(A+C)/2]=(u+w)v$$

代入上式整理得

$$[(u+w)^2-1]r_3^2+2rr_3-r^2=0$$

解得 $r_3=r(u+w+1)^{-1}$ 或 $r_3=r(1-u-w)^{-1}$,易证 $u>w^{-1}$,故 $u+w>2$,故

$$r_3=r(1+u+w)^{-1} \qquad (6)$$

把式(6)代入上面 r_1,r_2 表达式得

$$r_1=r(u+w)(u^2+u+w+1)^{-1}=r(1+k)^{-1}$$

其中 $k=(1+u^2)(u+w)^{-1}=u+(1-uw)(u+w)^{-1}=u-\cot(\frac{A+C}{2})=u-v$

故

$$r_1=r(1+u-v)^{-1} \qquad (7)$$

同理

$$r_2=r(1+w-v)^{-1} \qquad (8)$$

此即满足引理1条件的三个圆唯一.

反过来,设 $\triangle ABC$ 的边 b 外旁切圆 $\odot I(r)$ 切三边于 D,E,F,作 $\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$,$\odot O_3(r_3)$ 分别内切 $\odot I$ 于 D,E,F 且使 r_1,r_2,r_3 满足式(6)、(7)、(8),由于 r_1,r_2,r_3 是式(3)、(4)、(5)的解,故 r_1,r_2 必满足式(2),此时 $O_1O_2{}^2=(r-r_1)^2+(r-r_2)^2+2(r-r_1)(r-r_2)\cos B=(r_1+r_2)^2$,即 $O_1O_2=r_1+r_2$,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切,同理 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$,$\odot O_2$ 均外切. 故满足引理1条件的三个圆存在. 引理1获证.

引理2 三个两两外切的圆的三条内公切线交于一点.

引理3 有两个相外切,第三个与它们均内切的三个圆的过切点的三条公切线交于一点(当三圆心不共线时)或相互平行(当三圆心共线时). 以上两引理见文[2].

引理4 满足条件 M 的 $\odot O_1,\odot O_2,\odot O_3$ 的三条内公切线的交点 P 是 $\triangle ABC$ 的满足式(1)的等差点.

证明 图4,依引理1,满足条件 M 的三个圆存在且唯一. 依引理2,分别过切点 M,N,K 的三条内公切线交于 P. 依引理3,PK 过 A,PM 过 B,PN 过 C.

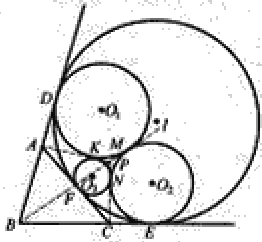


图4

$PA-a=PK+AK-a=$

$PK+\frac{1}{2}(a+b+c)-c-a=$

$PK+\frac{1}{2}(b-a-c)$

$PC-c=PN+CF-c=$

$$PN+\frac{1}{2}(a+b+c)-c-a=$$

$$PN+\frac{1}{2}(b-a-c)$$

$$b-PB=b-BE+PM=$$

$$b-\frac{1}{2}(a+b+c)+PM=$$

$$PM+\frac{1}{2}(b-a-c)$$

由 $PM=PN=PK$ 有 $PA-a=PC-c=b-PB$，P 满足式(1)，引理4获证.

引理5 $\triangle ABC$ 中，P 是 K_b 内满足 $PA-a=b-PB=PC-c$ 的等差点，则 P 是满足条件 M 的 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 的三条内公切线的交点.

证明 图5，设 $\triangle ABP$ 的边 PA 外的旁切圆 $\odot O_1$，$\triangle PBC$ 的边 PC 外旁切圆 $\odot O_2$，$\triangle PAC$ 内切圆 $\odot O_3$ 切相应三角形三边所在直线分别于 D、M_1、K_1，E、M_2、N_2，F、N_3、K_3. $PA-a=PA-BE+CE=PA-BM_2+CE=PA-PB-PM_2+CN_2=PA-PB+PC-PN_2-PM_2=PA-PB+PC-2PM_2=PA-PB+PC-2PN_2$. 同理，$PC-c=PA-PB+PC-2PM_1=PA-PB+PC-2PK_1$. $b-PB=AK_3+CN_3-PB=PA-PK_3+PC-PN_3-PB=PA-PB+PC-2PK_3=PA-PB+PC-2PN_3$. 又 $PA-a=PC-c=b-PB$，故 $PM_1=PM_2$，$PK_1=PK_3$，$PN_2=PN_3$. 故 M_1 与 M_2，K_1 与 K_3，N_2 与 N_3 均重合，此时 $O_1M_1\perp PB$，$PB\perp O_2M_1$，故 O_1，M_1，O_2 共线，$O_1O_2=O_1M_1+O_2M_2$，故 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 外切，同理 $\odot O_3$ 与 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 均外切，PA，PB，PC 是内公切线. 又 $BE=BM_2=BD$，$CE=CN_2=CF$，$AD=AK_1=AF$，故 D，E，F 为 $\triangle ABC$ 的边 b 外的旁切圆 $\odot I$ 在三边上的切点. 仿上可证 $\odot I$ 与 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 均内切. 引理5获证.

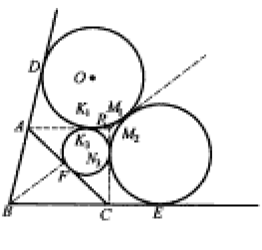


图5

由引理4知，K_b 内满足式(1)的等差点存在，由引理5及引理1知，K_b 内满足式(1)的等差点唯一，定理得证.

由上文可知，$\triangle ABC$ 中满足式(1)的等差点至少有2个，其中有且仅有一个落在 K_b 内，为区别起见，定义：$\triangle ABC$ 的 K_b 内满足 $PA-a=b-PB=PC-c$ 的等差点叫第一等差点. 与此类似，K_c 内满足 $PA-a=PB-b=c-PC$ 的唯一的 P，K_a 内满足 $a-PA=PB-b=PC-c$ 的唯一的 P 也都叫第一等差点.

2. 第一等差点的性质

下文恒设 P 为 $\triangle ABC$ 的 K_b 内第一等差点.

性质1 A 为 $\triangle PBC$ 的等差点，B 为 $\triangle PAC$ 的等差点，C 为 $\triangle PAB$ 的等差点. 即 $\triangle ABC$ 的第一等差点与其三个顶点构成"等差点组". 该性质依定义易证.

性质2 图6，$\triangle PAB$ 边 PA 外旁切圆 $\odot O_1(r_1)$，$\triangle PBC$ 边 PC 外旁切圆 $\odot O_2(r_2)$，$\triangle PAC$ 内切圆 $\odot O_3(r_3)$ 两两外切，且与 $\triangle ABC$ 的边 b 外旁切圆 $\odot I(r)$ 分别内切于 $\odot I$ 在三边(或所在直线)上的切点. PA，PB，PC，AB，AC，BC 为上述相应两圆的公切线. 若 $\odot I$ 分别切 AB，BC，AC 于 D，E，F，则 $r_3^{-1}=r^{-1}+AF^{-1}+CF^{-1}$，$r_1^{-1}=r^{-1}+AD^{-1}-BD^{-1}$，$r_2^{-1}=r^{-1}+CE^{-1}-BE^{-1}$.

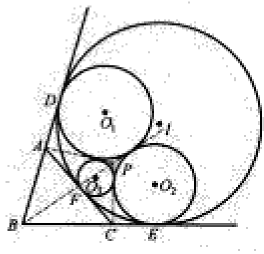


图6

证明 依引理5该性质前半部分成立. 由引理1证明过程中的式(6)、(7)、(8)有 $r_1=r(u-v+1)^{-1}$，$r_2=r(w-v+1)^{-1}$，$r_3=r(u+w+1)^{-1}$. 又 $u=\cot(\frac{A}{2})=\cot\angle AIF=\frac{r}{AF}$，$v=\tan(\frac{B}{2})=\frac{r}{BE}=\frac{r}{BD}$，$w=\cot(\frac{C}{2})=\cot\angle CIF=\frac{r}{CF}$，代入上述三式整理得后半部分.

性质3 图6，$\triangle PAB$ 边 PA 外旁切圆 $\odot O_1$，$\triangle PBC$ 边 PC 外旁切圆 $\odot O_2$，$\triangle PAC$ 内切圆 $\odot O_3$，则 P 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的内心. 本性质由性质2易证.

性质4 D，E 分别为边 BA，BC 延长线上的点，令 $\angle CAP$，$\angle PAD$，$\angle ABP$，$\angle PBC$，$\angle PCE$，$\angle PCA$ 分别为 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5，θ_6，则

$$\sin(\theta_1/2)\sin(\theta_3/2)\sin(\theta_5/2) = \sin(\theta_2/2)\sin(\theta_4/2)\sin(\theta_6/2)$$

$$\cos(\theta_1/2)\cos(\theta_3/2)\cos(\theta_5/2) = \cos(\theta_2/2)\cos(\theta_4/2)\cos(\theta_6/2)$$

证明 图7，由正弦定理有 $PA\sin\theta_1 = PC\sin\theta_6$，$PB\sin\theta_3 = PA\sin\theta_2$，$PC\sin\theta_5 = PB\sin\theta_4$. 故

$$\sin\theta_1\sin\theta_3\sin\theta_5 = \sin\theta_2\sin\theta_4\sin\theta_6 \quad (9)$$

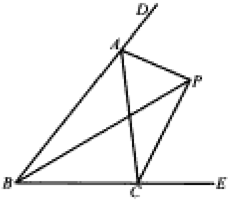


图7

依性质2，$\triangle PAB$ 边 PA 外旁切圆 $\odot O_1(r_1)$，$\triangle PBC$ 边 PC 外旁切圆 $\odot O_2(r_2)$，$\triangle PAC$ 内切圆 $\odot O_3(r_3)$ 两两外切，由此易证

$$\tan(\frac{\theta_1}{2})\tan(\frac{\theta_3}{2})\tan(\frac{\theta_5}{2}) = \tan(\frac{\theta_2}{2})\tan(\frac{\theta_4}{2})\tan(\frac{\theta_6}{2}) \quad (10)$$

(9)、(10)两式对应两边相乘得证.

性质5 P 关于 BC 边中点，AB 边中点，AC 边中点对称点分别为 A_1，C_1，B_1，则 BCB_1C_1，ACA_1C_1，ABA_1B_1 分别是顶点在以 A，A_1 为焦点的双曲线、以 B，B_1 为焦点的双曲线、以 C，C_1 为焦点的双曲线上的平行四边形，这三条双曲线中心相同、实轴相等，从而它们外切于以实轴为直径的圆.

证明 图8，由 CB_1，BC_1 与 PA 均平行且相等，故 BCB_1C_1 为平行四边形，同理 ACA_1C_1 与 ABA_1B_1 均为平行四边形，且 AA_1，BB_1，CC_1 中点重合. 故 $|BA_1 - BA| = |B_1A_1 - B_1A| = |PC - AB|$，$|C_1A_1 - C_1A| = |CA_1 - CA| = |CA - PB|$，又依条件 $|PC - AB| = |CA - PB| = 2a'$，故平行四边形 BCB_1C_1 顶点均在以 A，A_1 为焦点，实轴长为 $2a'$ 的双曲线上. 同理平行四边形 ACA_1C_1，平行四边形 ABA_1B_1 顶点分别在以 B，B_1 为焦点和以 C，C_1 为焦点，实轴长均为 $2a'$ 的双曲线上. 显然这三条双曲线中心相同、实轴相等，从而它们外切于以实轴为直径的圆.

性质6 P 在 $\triangle ABC$ 三边所在直线上的射影为 D，E，F，则 $\odot DEF$ 与 $\triangle ABC$ 边 b 外旁切圆相切. 该性质见文[3].

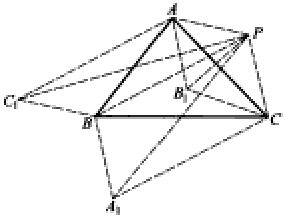


图8

推论 $\odot O_1(r_1)$，$\odot O_2(r_2)$，$\odot O_3(r_3)$ 两两外切，$\odot I(r)$ 与 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 分别内切，则 $r^{-1} + r_1^{-1} + r_2^{-1} + r_3^{-1} = 2\sqrt{(r_1r_2)^{-1} + (r_2r_3)^{-1} + (r_1r_3)^{-1}}$.

引理6 $\odot I(r)$ 与 $\odot O_1(r_1)$，$\odot O_2(r_2)$ 分别内切于 D，E，且 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 相外切，过 D，E 作 $\odot I$ 的两切线交于 B，则 $BD = \sqrt{rr_1r_2(r - r_1 - r_2)^{-1}}$. 该引理详仿文[1]性质7的证明易得.

引理7 P 为 $\triangle ABC$ 内的等和点，$\triangle ABC$ 内切圆 $\odot I(r)$ 切 BC 于 D，则 $\triangle PBC$ 内切圆 $\odot O_1(r_1)$ 与 $\odot I$ 内切于 D，且 $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}$. 该引理见文[1]性质3.

推论证明 设 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 与 $\odot I$ 分别切于 D，E，F. 过 D，E，F 分别作 $\odot I$ 切线有两种情形：①要么两两相交于 A，B，C；②要么有两条平行.

对情形①，由引理2，3得，过两两外切的 $\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 的切点的三条内公切线交于一点 P，且分别过 B，A，C. 又有两种情形：$\odot I$ 要么是 $\triangle ABC$ 的旁切圆，要么是 $\triangle ABC$ 的内切圆.

当 $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆时，不妨设它为边 a 外的旁切圆，图9，由定理知 P 为 $\triangle ABC$ 边 a 外开区域内第一等差点，

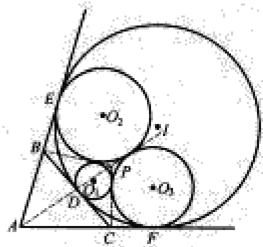


图9

由性质2，$r_1^{-1} = r^{-1} + BD^{-1} + CD^{-1}$，由引理6

$$BD^{-1} = \sqrt{(r - r_1 - r_2)(rr_1r_2)^{-1}}$$

$$CD^{-1}=\sqrt{(r-r_1-r_3)(rr_1r_3)^{-1}}$$

令 $BD^{-1}=X$，$CD^{-1}=Y$，则 $X+Y=r_1^{-1}-r^{-1}$，$X^2-Y^2=(r_1^{-1}-r^{-1})(r_2^{-1}-r_3^{-1})$，故 $X-Y=r_2^{-1}-r_3^{-1}$. 从而 $2X=r_1^{-1}+r_2^{-1}-r_3^{-1}-r^{-1}$，两边平方并展开得：$4[(r_1r_2)^{-1}-(rr_1)^{-1}-(rr_2)^{-1}]=r^{-2}-2r^{-1}(r_1^{-1}+r_2^{-1}-r_3^{-1})+(r_1^{-1}+r_2^{-1}-r_3^{-1})^2$，整理后配方得 $4(r_1r_2)^{-1}=(r^{-1}+r_1^{-1}+r_2^{-1}+r_3^{-1})^2+(r_1^{-1}+r_2^{-1}-r_3^{-1})^2-(r_1^{-1}+r_2^{-1}+r_3^{-1})^2$，整理之知推论成立.

当 ⊙ I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆时，图 10，易证 P 为 $\triangle ABC$ 内的等和点，由引理 7，$r_1^{-1}=r^{-1}+BD^{-1}+CD^{-1}$，由引理 6，$BD^{-1}=\sqrt{(r-r_1-r_2)(rr_1r_2)^{-1}}$，$CD^{-1}=\sqrt{(r-r_1-r_3)(rr_1r_3)^{-1}}$，后续推理同上，推论成立.

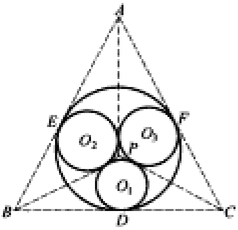


图 10

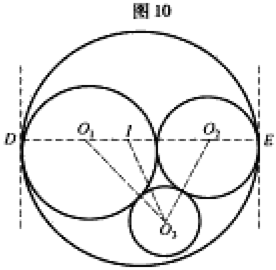


图 11

对情形 ②，不妨设过 D 的切线与过 E 的切线平行，图 11，则 DE 过 O_1,I,O_2，$r=r_1+r_2$，$O_1I=r_2$，$IO_2=r_1$，$IO_3=r-r_3$，由 $\cos\angle DIO_3=-\cos\angle EIO_3$ 及余弦定理可得 $r_3=(r_1+r_2)r_1r_2(r_1^{\ 2}+r_1r_2+r_2^{\ 2})^{-1}$，把 r_3 代入推论的结论两边，成立.

3. $\triangle ABC$ 的第一等差点的作法

① 作 $\triangle ABC$ 边 b 外旁切圆 ⊙I，设 ⊙I 切 AC 于 F.

② 任意作线段 MN，在 MN 同侧作 $MS=AF$，$NL=CF$，且使 $MS\,/\!/\,NL$，连结 ML，NS 交于 O，过 O 作 $OE\,/\!/\,MS$ 交 MN 于 E，则 $OE^{-1}=AF^{-1}+CF^{-1}$.

③ 同理作线段 QR，使 $QR^{-1}=OE^{-1}+IF^{-1}$，即 $QR^{-1}=AF^{-1}+CF^{-1}+r^{-1}$.

④ 作 ⊙O_1，使之与 ⊙I 内切于 F，且 ⊙O_1 半径 $r_1=OF$.

⑤ 过 A，C 作 ⊙ O_1 的切线，它们在 $\triangle ABC$ 边 b 外开区域内交于一点 P.

依性质 2，P 为 $\triangle ABC$ 边 b 外开区域内第一等差点.

4. 第一等差点的后续研究方向

依文[1]知，$\triangle ABC$ 内切圆确定唯一的该三角形内的等和点，又由本文知 $\triangle ABC$ 的每个旁切圆确定唯一的第一等差点，那么 $\triangle ABC$ 内的等和点与三个第一等差点之间，以及它们与该三角形的内心和三个旁心之间究竟有怎样的联系，第一等差点还有哪些优美的性质等，就成了颇值得探究的问题了.

参考文献

[1] 黄华松，万劲松. 三角形的"等和点"初探[J]. 中学数学研究(华南师大)，2007(5)：15.

[2] 黄华松，黄光文. 八圆定理[J]. 中学数学，2006，11：封底.

[3] 梁绍鸿. 初等数学复习与研究(平面几何)[M]. 北京：人民教育出版社，1980.

作者简介

黄华松，男，1969 年出生。湖北鄂州市二中高级教师，全国初等数学研究会常务理事。学校"MM 教育方式"课题组组长。长期担任班主任及双班的数学教学工作，教育教学效果显著。多次获鄂州市优秀教师，湖北省"三育人"先进个人，获首届鄂州青年五四奖章，鄂州市第五届十大杰出青年提名奖。已在专业期刊上发表 7 篇初等数学研究方面的文章，是全国第二届青年初等数学研究奖获得者。

三角形外角平分线的一组性质

周祖英

（湖北省公安县梅园中学，湖北　公安　434300）

摘　要：本文定义了三角形等差点及第一等差点的概念，证明了第一等差点的存在性定理，开发出了它的若干条优美性质，以及给出了该点的尺规作图. 并以这些性质为基础，揭示了四个两两相切的圆的半径之间的数量关系.

关键词：等差点　第一等差点

本文给出三角形外角平分线的几个性质.

如图1，$\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线三角形，$\triangle ABC$，$\triangle ABF$，$\triangle BCD$，$\triangle CAE$ 的外心分别为 O,O_C,O_A,O_B.

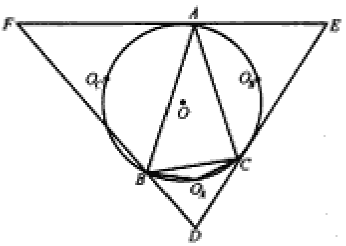


图1

引理1[1]

$$D=90°-\frac{A}{2}$$

$$E=90°-\frac{B}{2}$$

$$F=90°-\frac{C}{2}$$

引理2　$\triangle ABF$，$\triangle BCD$，$\triangle CAE$ 的内切圆与 $\triangle ABC$ 的三边的切点分别为 Z,X,Y，则 AX,BY,CZ 共点.

证明　记 $BC=a,CA=b,AB=c,s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle ABC$ 的外接圆，内切圆半径分别为 R,r，$\triangle ABF$，$\triangle BCD$，$\triangle CAE$ 的内切圆半径分别为 r_C,r_A,r_B，半周长分别为 s_C,s_A,s_B. 则有[1]

$$CD=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$DB=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}$$

所以

$$s_A=(BC+CD+DB)/2=$$
$$2R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$$

由内切圆的性质有[2]

$$BX=s_A-CD=$$
$$2R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$$

同理

$$XC=2R\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2})$$

$$AZ=2R\sin\frac{C}{2}(-\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$$

$$ZB=2R\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$$

$$CY=2R\sin\frac{B}{2}(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2})$$

$$YA=2R\sin\frac{B}{2}(-\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})$$

由以上6式立即看出有

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

因此，AX,BY,CZ 共点，此点用 Y 表示.

性质1　A,B,C,O_A,O_B,O_C 六点共圆.

证明　$\angle BO_AC=2D=2(90°-\frac{A}{2})=180°-A$，所以 A,B,O_A,C 四点共圆，即 O_A 在 $\odot O$ 上. 同理，O_B,O_C 也在 $\odot O$ 上. 所以 A,B,C,O_A,O_B,O_C 六点共圆.

性质2　A,I,O_A,D；B,I,O_B,E；C,I,O_C,F 分别四点共线(图2).

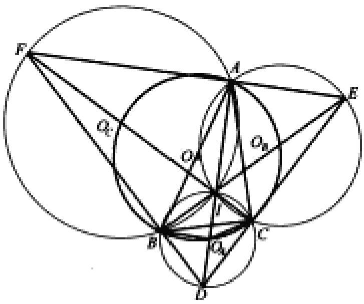


图 2

证明 因为 $\angle BIC = 90° + \frac{A}{2}$，$\angle BDC = 90° - \frac{A}{2}$，所以，$\angle BIC + \angle BDC = 180°$，所以 B,D,C,I 四点共圆. 所以

$$\angle BID + \angle AIB = \angle BCD + 180° - \angle AIB = 90° - \frac{C}{2} + 90° + \frac{C}{2} = 180°$$

所以 A,I,D 三点共线. 而 $IB \perp DB$，ID 是 $\odot O_A$ 的直径，所以 A,I,O_A,D 四点共线.

同理可证另两个结论.

推论 $\odot O_A, \odot O_B, \odot O_C$ 交于 $\triangle ABC$ 的内心 I.

性质 3 $\triangle O_AO_BO_C$ 与 $\triangle DEF$ 位似，且位似中心是 $\triangle ABC$ 的内心 I.

证明 设 $\triangle ABF, \triangle BCD, \triangle CAE$ 的外接圆半径分别为 R_C, R_A, R_B，则

$$2R_A = \frac{BC}{\sin\angle BDC} = \frac{a}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{2R\sin A}{\cos\frac{A}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}$$

O_A 到 DE 的距离为

$$O_AM = R_A\cos\frac{\angle CO_AD}{2} = 2R\sin\frac{A}{2}\cos\angle CBD = 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

O_B 到 DE 的距离为

$$O_BN = R_B\cos\frac{\angle CO_BE}{2} = 2R\sin\frac{B}{2}\cos\angle CAE = 2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$$

所以 $O_AM = O_BN$，因此，$O_AO_B \parallel DE$. 同理，$O_BO_C \parallel EF$，$O_CO_A \parallel FD$，再由性质 2 即知结论成立(图 3).

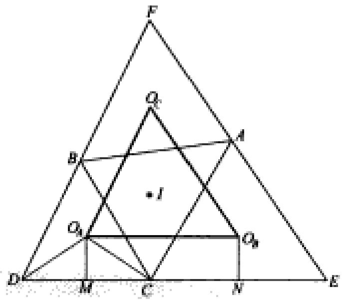


图 3

作者简介

周祖英，女，1971 年 2 月生，毕业于长江大学，1989 年 8 月参加教育工作，中学一级教师，任教于湖北省公安县梅园中学。多次在《初中数学教与学》、《中小学数学(初中版)》等杂志上发表论文，"谈谈数学探索能力及其培养"一文还获得全国哲学社会科学规划办公室、教育部社政司"十五"规划重点课题(批准文号：OIBZX052)优秀成果奖。

周界中点三角形的一个基本不等式的上界

杨志明
(广东广雅中学,广东 510160)

摘 要:本文得到了杨学枝关于周界三角形一个基本不等式的上界,以及其应用.

关键词:周界中点 周界中点三角形 基本不等式 上界

文[1]定义了三角形的周界中点:如果三角形一边上的一点和这边所对的顶点把三角形的周界分割成两个等长的折线,就称这一点为顶点为三角形的周界中点.以三角形的三个周界中点为顶点的三角形,我们不妨称之为周界中点三角形.

自从文[1]定义了三角形的周界中点以来,有关周界中点三角形的研究引起了广大数学爱好者的极大关注,各种数学期刊先后发表了多篇这方面的文章.

为了行文方便,本文约定:$\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 与半周长及面积分别为 a,b,c 和 s,Δ,外接圆的半径和内切圆半径分别为 R,r,D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的周界中点. $\triangle DEF$ 的边 EF,FD,DE 与半周长及面积分别为 a',b',c' 和 s',Δ',外接圆的半径和内切圆半径分别为 R',r'.

文[2]用几何的方法证明了周界中点三角形的一个基本不等式

$$EF \geqslant a-\frac{r}{2R}(b+c) \tag{1}$$

自从文[2]发表至今,已发表的诸多周界中点三角形不等式的文章,凡是与 EF 有关的不等式几乎都可以用(1)证出.可见式(1)确实是周界中点三角形的一个基本不等式.

经探讨发现,式(1)有一个优美的上界.

定理

$$EF \leqslant a+\frac{R-6r}{8R}(b+c) \tag{2}$$

证明 由文[3]知

$$EF=\sqrt{(b-c)^2+\frac{4(s-b)^2(s-c)^2}{bc}} \tag{3}$$

令 $s-a=x,s-b=y,s-c=z$,则 $a=y+z$, $b=z+x,c=x+y$,则由式(3)知,式(2)等价于

$$\sqrt{(z-x)^2+\frac{4y^2z^2}{(z+x)(x+y)}} \leqslant y+z+\frac{(y+z)(z+x)(x+y)-24xyz}{8(y+z)(z+x)(x+y)}(2x+y+z) \Leftrightarrow \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&[4(y^2+z^2)+8yz]x+\\&[44(y^2+z^2)-60yz(y+z)]x^5+\\&[93(y^4+z^4)-516yz(y^2+z^2)+1\,086y^2z^2]x^4+\\&[70(y+z)-450yz(y+z)+412yz9y+z)]x^3+\\&[17(y^6+z^6)+32yz(y^4+z^4)-\\&149y^2z^2(y^2+z^2)-328y^3z^3]x^2+\\&[34yz(y^5+z^5)+30y^2z^2(y^3+z^3)]x+\\&17y^2z^2(y^4+z^4)+68y^3z^3(y^2+z^2)+102y^4z^4 \geqslant 0\end{aligned} \tag{5}$$

令 $y=tx,z=kx,x=1$,则式(5)等价于

$$\begin{aligned}&17(t^6+k^6)+(70+34tk)(t^5+k^5)+\\&(93+32tk+17t^2k^2)(t^4+k^4)+\\&(44-450tk+30t^2k^2)(t^3+k^3)+\\&(4-516tk-149t^2k^2+68t^3k^3)(t^2+k^2)+\\&(-60tk+412t^2k^2-80t^3k^3)(t+k)+\\&8tk+1\,086t^2k^2-328t^3k^3+102t^4k^4 \geqslant 0\end{aligned} \tag{6}$$

令 $t+k=u,tk=v$,则

$$t^2+k^2=u^2-2v$$
$$t^3+k^3=u(u^2-3v)$$
$$t^4+k^4=(u^2-2v)^2-2v^2$$
$$t^5+k^5=u[(u^2-2v)^2-2v^2]-uv(u^2-3v)$$
$$t^6+k^6=u^2(u^2-3v)^2-2v^3$$

故式(6)等价于

$$\begin{aligned}&17[u^2(u^2-3v)^2-2v^3]+\\&(70+34v)\{u[(u^2-2v)^2-2v^2]-\\&uv(u^2-3v)\}+(93+32v+17v^2)\cdot\\&[(u^2-2v)^2-2v^2]+\\&(44-450v+30v^2)u(u^2-3v)+\\&(4-516v-149v^2+68v^3)(u^2-2v)+\end{aligned}$$

$$(-60v+412v^2-80v^3)u+8v+1\,086v^2-328v^3+102v^4\geqslant 0 \quad (7)$$

式(7)等价于

$$f(v)=(2\,304+2\,112u-124u^2-140u^3+17u^4)v^2+(-192u-888u^2-800u^3-70u^4+34u^5)v+4u^2+44u^3+93u^4+70u^5\geqslant 0 \quad (8)$$

$f(v)$ 是关于 v 的二次函数,$f(v)$ 的二次项系数

$$2\,304+2\,112u-124u^2-140u^3+17u^4=(u^2-48)^2+4u(4u^3-35u^2-7u+528)>4u(4u^3-35u^2-7u+528)=4u\{(u^3+u^3+7^3-3\cdot 7u^2)+(u^3+7^2u-2\cdot 7u)+[u^3+(\sqrt{20})^3+(\sqrt{20})^3-60u]+185-40\sqrt{20}\}>0$$

从而二次函数 $f(v)$ 的开口向上,且其判别式

$$\Delta=(-192u-888u^2-800u^3-70u^4+34u^5)^2-4(2\,304+2\,112u-124u^2-140u^3+17u^4)\cdot(4u^2+44u^3+93u^4+70u^5)=-8\,192u^8-8\,192u^7+73\,728u^6+40\,960u^5-131\,072u^4-98\,304u^3=-8\,192u^3(u+3)(u+1)^2(u-2)^2\leqslant 0$$

因此二次函数 $f(v)$ 的开口向上,且其判别式 $\Delta\leqslant 0$,故式(8)成立,从而式(3)得证.

由式(1)、(2)即得一条优美的不等式链

$$a-\frac{r}{2R}(b+c)\leqslant EF\leqslant a+\frac{R-6r}{8R}(b+c)\Leftrightarrow \quad (9)$$

$$1-\frac{r}{2R}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\leqslant\frac{a'}{a}\leqslant 1+\frac{R-6r}{8R}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right) \quad (10)$$

由 a,b,c 的轮换性可得

$$b-\frac{r}{2R}(c+a)\leqslant FD\leqslant b+\frac{R-6r}{8R}(c+a)\Leftrightarrow \quad (11)$$

$$1-\frac{r}{2R}\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)\leqslant\frac{b'}{b}\leqslant 1+\frac{R-6r}{8R}\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right) \quad (12)$$

$$c-\frac{r}{2R}(a+b)\leqslant DE\leqslant c+\frac{R-6r}{8R}(a+b)\Leftrightarrow \quad (13)$$

$$1-\frac{r}{2R}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\leqslant\frac{c'}{c}\leqslant 1+\frac{R-6r}{8R}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right) \quad (14)$$

由式(9)、(11)、(13)同向相加便得:

命题1 $1-\frac{r}{2R}\leqslant\frac{s'}{s}\leqslant 1+\frac{R-6r}{8R}$ (15)

由文[4]知,$\frac{r'}{r}=\frac{s}{s'}\cdot\frac{r}{2R}$,结合式(15)便得:

命题2 $\frac{2R}{r^2}-\frac{2}{R}\leqslant\frac{1}{r'}\leqslant\frac{5}{2r}-\frac{3}{R}$ (16)

由式(10)、(12)、(14)同向相加便得:

命题3

$$3-\frac{r}{2R}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\leqslant\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\leqslant 3+\frac{R-6r}{8R}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad (17)$$

由文[5]知,$\frac{a'}{a}=\frac{R'}{R}$,结合式(17)便得:

命题4

$$1-\frac{r}{6R}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\leqslant\frac{R'}{R}\leqslant 1+\frac{R-6r}{24R}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \quad (18)$$

参考文献

[1] 张学哲.三角形的周界中线[J].数学通报,1995,(4).

[2] 杨学枝.关于周界中点三角形的两个不等式[J].中学数学,1996,(6).

[3] 丁遵标.周界中点三角形又一有趣的性质[J].数学通讯,2002,(13).

[4] 吴善和.涉及三角形的面心的几个不等式[J].中学教研(数学),1996,(6).

[5] 周才凯.周界中点三角形的性质探讨[J].福建中学数学,1996,(3).

[6] 杨学枝.对一个猜想题的证明[J].福建中学数学,1996,(4).

[7] 杨国栾.关于周界三角形的两个不等式[J].数学教学研究,2002,(8).

三角形内心三角形的一个不等式

邹守文　周友明

（安徽省南陵县实验中学，安徽　南陵　241300）

摘　要：文中证明了三角形内心组成的三角形面积的一个不等式。

关键词：三角形　内心　不等式

本文给出直角三角形的内心组成三角形的一个不等式：

定理　CD是$Rt\triangle ABC$斜边上的高，I_1,I_2,I_3分别是$\triangle ABC,\triangle ACD,\triangle BCD$的内心，则$\dfrac{S_{\triangle I_1I_2I_3}}{S_{\triangle ABC}}\leqslant\dfrac{5\sqrt{2}-7}{2}$.

证明　先证明下面的引理：

引理　直角$\triangle ABC$中，$BC=a,CA=b,AB=c$，$\angle C=90^\circ$，$\triangle ABC$的内切圆半径为r，则$r=\dfrac{1}{2}(a+b-c)$.

证明　设$\triangle ABC$的内切圆$\odot I$分别切AB,BC,CA于点D,E,F，连接IE,IF，易证四边形$CEIF$是正方形，则$CE=CF=IE=IF=r$，又由切线长定理知$AD=AF,BD=BE$，所以$AF=b-r,BE=a-r,AF+BE=AD+BD=b-r+a-r=c$，故

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)$$

下面证明定理.

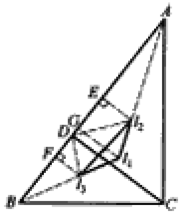
由射影定理得到$CD=\dfrac{ab}{c},AD=\dfrac{b^2}{c},BD=\dfrac{a^2}{c}$.

连接AI_1,I_2D,I_3D，过I_1作$I_1G\perp AB$于点G，过I_2作$I_2E\perp AB$于点E，过I_3作$I_3F\perp AB$于点F. 由引理知

$$I_1G=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)=\frac{1}{2}(a+b-c),$$

$$I_2E=\frac{1}{2}(AD+CD-AC)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+\frac{ab}{c}-b\right)=\frac{b(a+b-c)}{2c}$$

$$I_3F=\frac{1}{2}(BD+CD-BC)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{c}+\frac{ab}{c}-a\right)=\frac{a(a+b-c)}{2c}$$



因为I_1,I_2,I_3分别是$\triangle ABC,\triangle ACD,\triangle BCD$的内心，所以$I_2$在$AI_1$上，$I_3$在$BI_1$上，$I_1G,I_2E,I_3F$分别是$\triangle ABC,\triangle ACD,\triangle BCD$的内切圆半径，$DI_2,DI_3$分别是$\angle ADC,\angle BDC$的平分线. 于是$\angle ADI_2=\angle I_2DC=45^\circ$，$\angle BDI_3=45^\circ$.

所以$\angle I_2DI_3=\angle I_2DC+\angle CDI_3=90^\circ\Rightarrow I_2D\perp I_3D$.

所以$DI_2=\sqrt{2}EI_2=\dfrac{\sqrt{2}b(a+b-c)}{2c},DI_3=\sqrt{2}FI_3=\dfrac{\sqrt{2}a(a+b-c)}{2c}$.

所以

$$S_{\triangle I_1I_2I_3}=S_{\triangle ABI_1}-S_{\triangle ADI_2}-S_{\triangle BDI_3}-S_{\triangle DI_2I_3}=$$

$$\frac{1}{2}AB\cdot I_1G-\frac{1}{2}AD\cdot I_2E-$$

$$\frac{1}{2}BD\cdot I_3F-\frac{1}{2}I_2D\cdot I_3D=$$

$$\frac{1}{2}c(a+b-c)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{c}\frac{b(a+b-c)}{2c}-$$

$$\frac{1}{2}\frac{a^2}{c}\frac{a(a+b-c)}{2c}-$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}b(a+b-c)}{2c}\frac{\sqrt{2}a(a+b-c)}{2c}=$$

$$\frac{1}{4}(a+b-c)c-\frac{b^3(a+b-c)}{4c^2}-$$

$\frac{a^3(a+b-c)}{4c^2}-\frac{ab(a+b-c)}{4c^2}=$

$\frac{1}{4}(a+b-c)\frac{c^3-[b^3+a^3+ab(a+b-c)]}{c^2}$

而

$c^3-[a^3+b^3+ab(a+b-c)]=$

$c^3-[(a+b)(a^2+b^2-ab)+ab(a+b-c)]=$

$c^3-[(a+b)(c^2-ab)+ab(a+b-c)]=$

$c^3-(a+b)c^2+abc$

所以 $S_{\triangle I_1I_2I_3}=\frac{a+b-c}{4}\cdot\frac{c^3-(a+b)c^2+abc}{c^2}=$

$\frac{(a+b-c)[c^2-(a+b)c+ab]}{4c}$

又 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$，所以

$\frac{S_{\triangle I_1I_2I_3}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(a+b-c)[c^2-(a+b)c+ab]}{2abc}$

令 $c=\sqrt{a^2+b^2}=x, a+b=y\Rightarrow ab=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$.

所以

$$\frac{S_{\triangle I_1I_2I_3}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(y-x)\left[x^2-xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)\right]}{2\cdot\frac{1}{2}(y^2-x^2)x}=$$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{2x(x+y)}=\frac{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}{2(\frac{x}{y}+1)}=\frac{t-2+\frac{1}{t}}{2(t+1)}=$$

$\frac{t^2-2t+1}{2(t+1)t}$（这里令 $\frac{x}{y}=t$）

则 $\frac{S_{\triangle I_1I_2I_3}}{S_{\triangle ABC}}=f(t)=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{t}-\frac{4}{t+1})$

而 $f'(t)=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(t+1)^2}\right]=$

$$\frac{4t^2-(t+1)^2}{t^2(t+1)^2}=\frac{(3t+1)(t-1)}{t^2(t+1)^2}$$

由 $x^2=a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$ 知 $x^2\geqslant\frac{y^2}{2}, x\geqslant\frac{\sqrt{2}y}{2}$.

又由三角形两边之和大于第三边，知 $x<y$，所以 $\frac{\sqrt{2}y}{2}\leqslant x<y, \frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t<1$.

所以 $f'(t)<0, f(t)$ 为减函数.

所以

$$f(t)\leqslant f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\frac{4}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}})=\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$$

故

$$\frac{S_{\triangle I_1I_2I_3}}{S_{\triangle ABC}}\leqslant\frac{5\sqrt{2}-7}{2}$$

由解题过程知当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}y$，即 $a=b$，也即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时等号成立.

作者简介

邹守文，男，安徽省南陵县实验中学教师，中国初等数学研究会会员，中国不等式研究小组成员，中国管理科学研究院特约研究员，《中学数学教学参考》、《数学周报》特约编辑，芜湖市数学会理事，长期致力于初等、竞赛不等式的研究，在《数学通报》、《数学教学》、《中国数学教育》、《中等数学》、《中学数学》、《中学数学教学》、《中学数学研究》等国家级、省级杂志发表不等式研究论文多篇，在中国不等式研究小组主办的杂志《不等式研究通讯》上发表论文20余篇，在各种杂志上共发表论文100多篇.

初等数学研究在数学教育研究中的地位

沈文选
（湖南师范大学数学系，湖南　长沙　410081）

摘　要：本文阐述了初等数学研究与师范类及中学数学教育研究的关系以及对数学教师的专业成长的关系.

关键词：初等数学　数学教育　基础教育

众所周知，初等数学历史悠久，内容广泛，学习与研究者多. 它是整个数学大厦的基石，显然，随着大厦的扩建，基石地盘也在扩展. 初等数学的基石地位，与现实生活、高等数学以及现代数学的血肉相连的关系，决定了初等数学的基础性、综合性等显著特性. 例如，在现实生活中，时间的几何模型是一条直线，没有开端，也没有终结，时间的连绵不断，正是实数连续性的直观背景. 在初等数学中，一条直线代表实数集合，看起来简单，但其实并不简单，它同时具有代数结构、拓扑结构和序结构，这些结构之间又有复杂的相互关系，很难脱离其具体背景来研究它. 同时，它的结构适中，既有丰富的内容，又不像其他结构简单的集合那样流与空泛，它蕴含了永远解决不完的问题.

由于初等数学的基础性、综合性等显著特性，也确立了初等数学研究在当今的数学教育研究的几个重要方向，诸如教育数学研究、基础课程改革研究、中学数学教育教学研究、高师数学教育研究等中的重要地位.

认清这种特性，可使我们在当前的初等数学研究中，看到肩上的重任.

1. 关于初等数学研究与教育数学研究

张景中院士的教育数学思想，被越来越多的人所接受，以至于从 2004 年成立全国教育数学研究会到现在，连续四年每年都召开了理事会和学术交流会. 他提出："为了数学教育的需要，对数学研究成果进行再创造式整理，提供适合于数学法加工的材料，为完成这一任务而进行的研究活动，如果发展起来，形成的方向或学科，就是教育数学".

张院士身体力行，在教育数学的研究中冲锋陷阵，对改造欧氏平面几何体系，对改造微积分理论进行了开创性的工作.

遵循张院士的教育数学思想的指导，我们可以认为：教育数学的内容体系至少可以从如下三个方面考虑：教材数学、测量数学、竞赛数学. 这三个方面的内容是数学教育中数学内容的重要组成部分，张院士进行的如上开创工作是研究教材数学的光辉范例.

为了贯彻以人的发展为本，为了早期发现并培养数学英才，我国的数学竞赛蓬勃开展起来了，从而也提出了研究竞赛数学的课题.

由于竞赛数学的内容是以体现竞技性与艺趣性、新颖性与挑战性、开放性与创造性、背景性与探索性等为特征的一个个千姿百态的且以机智巧妙的解法而著称的数学问题，这是不同于其他数学学科特征的，这不仅体现了数学英才追求的培养目标，而且是为培养数学英才来对数学材料或成果进行再创造而形成的学科特征. 因而，我们有理由说，竞赛数学是培养数学英才的教育数学.

我国是有历史传统的考试大国，各类考试在我们的生活中是家常便饭，从研究考试到研究测量，从数学考试到研究数学测量理论的研究，我国数学工作者已做了大量工作，已建立了一套数学测量理论体系，但形势的发展又提出了研究测量数学的课题.

测量数学就是为了更科学地进行数学测量，而对测量内容进行深入地研究，创造或进行再创造出数学测量中的数学内容，使得这些数学内容更科学，更合理，更能体现数学的本质，体现数学的理性精神与数学思想方法，体现数学的求简，求美追求等. 因而，测量数学也是教育数学研究中的一个重要方面. 综上所述，由于教育数学研究可以在初等范围和高等范围内

进行,从而,在初等范围内进行教育数学研究,就是进行初等数学研究,也就是说,在初等数学中,我们要进行教材数学、竞赛数学、测量数学的研究.

2. 初等数学研究与基础教育课程改革研究

数学教育的核心是数学课程问题,数学教育改革的核心问题是数学课程内容的改革. 在我国新一轮的基础课程改革中,现在已制定国家课程标准,按照这个标准,已经或还要开发各种不同版本的教材.

现今,各种版本的不同风格的数学教材虽然几经编写、更新,但由于教材编写的时间性和针对性,还存在一些遗留的问题,还不能及时把处理问题的一些新思想、新方法、新手段包括进行,这就要求教师根据学生的数学现实要进行研究,要在教材内容中引进一些新思想、新方法、新手段. 教学内容绝不等同于数学成果的直接照搬,而是经教师再研究、再处理,对数学内容再进行加工和对过程的创造性设计. 每位教师的教学都会尽力把材料组织到自己满意为止. 在这再处理、重新组织的过程中,就是进行初等数学研究,也就是说,在基础教育课程改革研究中是离不开初等数学研究的.

在新一轮的课程改革中,课程设置是按必修与选修结合安排的,在必修中又是以模块的形式安排的,首先如何适应这种新的格局变化,其次在必修与选修的内容中如何把握分寸,在选修中如何组织材料等均是值得我们深入探索的. 这给我们初等数学研究工作者提出了大量新的又具有挑战性的问题与课题.

特别是数学文化已经列入课程标准. 数学也许不能像人文科学那样深入人生的感情世界,但是,让一个孩子付出学习12年数学的代价,总得给他一些适合时代需要的常识和方法,享受数学智慧给人生带来的精彩. 这样的目标不是难题、高分、比赛、获奖、升学所能概括的. 毕竟在限制时间的课堂教学中,只能开发一部分智慧,数学的价值和精彩更多地在课堂外.

在新一轮课程改革研究中,我个人对数学文化曾有过这样的体验:数学是空间关系的浓缩,数学是数量关系的组合,数学是科学发展的桥梁,数学是人类远离愚昧、走向文明的使者,数学是用数学符号和图形编制的画卷,数学是 x,y,z 合唱出来的高亢优美的歌曲!

人们喜爱音乐,因为它有悦耳的优美旋律!

人们喜爱图画,因为它描绘出自然界与人间壮丽美景!

人们喜爱诗歌,因为它又抒发情怀的韵律!

人们喜爱哲学,因为它使人更加聪明!

人们喜爱科技,因为它是现代物质文明的标志!

而数学之为得,数学之为用,难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达!

你看,不是吗?

数学眼光,使我们世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律,看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹;使我们看到的是满眼绚丽多彩的数学景象!

数学思想,使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的优美歌曲,似协奏曲一样充满着和谐的旋律,让人难以忘怀,难以割舍!

数学应用,给我们展示出了数学的神通广大,在各个领域与角落内闪烁着人类智慧的火花!

数学建模,呈现出了人类文明亮丽的风景!特别是那呈现出的抽象彩虹 —— 一个个精巧的数学模型,璀璨夺目,流光溢彩!

数学方法,像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景色,令人目不暇接!

数学史话,充满了诱人的前辈的创造或再创造的心血机智,使人获得明智的丰富营养!

从而,提高我国每一个公民的数学文化水平及数学素养,是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分,这也是数学基础教育中的重要目标. 为此,我们在初等数学研究中,汇集了大量的初等数学研究成果,形成了一套丛书:《数学眼观透视》、《数学思想领悟》、《数学应用展观》、《数学建模导引》、《数学方法溯源》、《数学史话览胜》,这是体现如何在新课程改革中融入数学文化的具体行动.

3. 初等数学研究与中学数学教学研究

在中学数学教学中,要研究教材,研究数学解题,研究教学方法,研究考试和评价,还要研究数学课外活动等繁多的问题.

在研究教材中,由于教材是初等数学内容,不管是对教材的浅加工还是深加工,这都是进行初等数学研究. 只有通过研究,在备课中才能准确理解每一节课知识的地位与作用,与前后节知识的内在联系,把握每节课知识中的重点、难点和关键,突破难点,把握关键点,提炼方法,升华思想,保证教学目标的合理确

定与顺利实现.

数学解题是数学教师的一项基本功.进行解题研究是中学数学教师必不可少的工作,因为解题教学工作是数学教师的天职,而那些只进行解题教学而不进行解题研究的老师,他们不懂得:"解题方法的实质就是对数学问题形成的认识",往往把解题看成死的和没有发展的材料(只求结果重答案),缺乏发展的观点,从而贻误学生.从解题理论研究来看,陕西师大的罗增儒教授已经给我们树立了典范.但也有许多问题值得我们亲身去研究、去体验,要把解题经验上升到解题理论,这不进行深入地探索是不会自主建构的.

在中学数学中研究数学方法,也要根据数学的特点:它充满理性精神,追求独立思索,追求真、善、美等,如果不从特点出发,形而上学地把其他数学方法搬来,一定达不到满意的效果.

在中学数学研究中,更要研究考试,特别是中考、高考,根据测量数学的观点,也是进行初等数学研究的工作,也是大有前途的研究工作.在数学考试题中,如何呈现数学的本质,数学理性精神,如何贯通数学思想、方法,如何深究数学能力,如何调整逻辑结构,如何体现对数学美的追求等,都是值得我们深入研究的.数学考试是数学教学评价中的一个重要方面.科学的试题在数学考试中发挥极为重要的作用.对于这点,需引起战斗在第一线的初等数学研究工作者的关注.

4. 初等数学研究与高师数学教育研究

高师数学教育专业的培养目标是为中等学校输送合格的数学教师.面向新世纪,一个合格的中等学校教师,首先要在思想政治、道德品质上达到一定的要求,有理想,遵纪守法,有较好的数学素养和数学教育的基本理论与知识;其次,他们必须掌握思想教育专业的基础理论,基本知识和基本技能;他们必须对中学数学教材有较全面、较系统、较深人的了解,能把所学的高等数学知识与初等数学知识有机结合起来,区的高等数学的指导,做到初等数学的深认识,了解初等数学研究的动态与形式及其新成果等,为今后胜任中等学校数学教学并成为推动中等学校数学教学改革的带头人且身体力行地进行初等数学研究及教学研究奠定基础.

高师数学教育专业高年级开设《初等数学研究》课程为达上述目标的重要课程之一,根据形势的发展,时代的要求,这门课程的教学内容要不断地更新:精简有关中学数学内容,有机地结合有关高等数学知识,尽可能有意识去分析并解决高观点指导下的初等数学问题,大量收集高等数学与初等数学机密结合的事例;突出课程的研究性质,在数学内容中展现出初等数学研究的新形势,容纳初等数学研究的有关新成果,提出初等数学研究的一些问题与课题,系统地介绍与探索进行初等数学研究的思想方法与途径;把解题和解题研究单独列出来,从理论的高度来处理,作为一门子课程来建设,探索适合中国国情的数学解题理论体系;加强初等数学应用教育与研究,建设数学建模子课程等.

在高师数学教育研究中如何对中学数学与现代数学的问题进行深人地研究,我们可以从两方面着手:一是探索中学数学问题的现代数学背景;二是利用现代数学观点、知识来看待和处理中学数学问题.

探索中学数学问题的现代数学背景,这里也是有大量工作值得做的.我个人也进行了初步探索,出版了一本《单形论导引——三角形的高维推广研究》的著作.从中可以了解到:从平面向量基本定理如何推广到高维欧氏空间的基本定理,从三角形的向量表示到 n 维单形的向量表示,如何由此提出重心坐标的研究课题,从三角形边界构成的条件如何提出研究 k 重向量的问题.

如此等等,从中也可以看到:平面几何、立体几何、解析几何进行有机的结合,运用向量、k 重向量、重心坐标、矩阵,行列式及微积分等重要数学工具将三角形性质推广到四面体,将三角形、四面体问题向高维欧氏空间推广,反过来又可以指导低维空间的应用研究.这样,使我们看到:在中学课本中引入向量、矩阵等内容的现实背景,还可以减少我们在初等数学研究中的重复劳动或澄清某些研究成果(许多中学数学杂志常刊发这些文章)意义不大的理论认识问题.也未更新知识,革新教材创造条件,还为扩大研究领域进行导引,也可以提高我们初等数学研究能力和研究水平.

以现代数学的教育观点、思想方法乃至有关知识来指导并实际地进行初等数学研究,可以统一中学数学的松散体系,可以系统地处理中学数学问题并做出一些新的推广和深发掘,可以对中学数学问题系统地

加以思想上的总结和数学方法论方面的提炼. 例如,如果用矩阵观点处理不等式的证明,不仅可以给出不等式证明的新途径,还为推广不等式,构造新不等式给出具体方法,又例如,如果用面积法、消点法、消数法、函数法可以处理初等数学中大量几何问题,代数问题等.

5. 初等数学研究与中学数学,高校数学学科方向教师岗位成才

进行初等数学研究,对于广大中学数学教师而言,是促使自己岗位成才的必由之路,是中学数学教师提高自己水平的切实可行途径,是促使自己热爱数学教育职业的有效方式,因而是搞好中学数学教学的重要保证. 进行初等数学研究,是中学数学教师打好数学功底的重要手段,一个教师,只有走教学与科研相结合之路,才能将教育工作提高到一个新的境界,因为教材所呈现的都是创造活动的最终结晶,这对学生了解数学创造的真实过程,以及培养他们创造能力都不是很有利. 但数学功底好的教师亲身经历了数学研究的全过程,从而把握了从知识到能力这一质变过程的规律,会研究的人才会指导别人动脑. 因为只有那些在科研和学术工作中奋勇前进,在第一线冲锋陷阵的教师,才有可能通过自己亲历其境的创造经验,把知识讲活,培养有创造力和发展观点的学生. 难以想象,一个毫无研究经历的教师能去进行"数学发现" 的生动训练. 因此,进行初等数学研究是中学教师岗位成才的一条成功之路.

时代在前进,我们要与时俱进. 仿造过去的行为,只能收获曾经的结果,要取得和原来不一样的结果,就要打破原来的思维方式和行为模式.

随着现代数学发展日新月异,我们不仅要进一步拓展初等数学的研究领域,还要乐于探索,以便获得一个又一个更深刻的结果. 让我们齐心协力、开拓奋进吧!

参考文献

[1] 沈文选. 教育数学新探 —— 返璞归真的数学研究[M]. 北京:科学出版社,2008.
[2] 沈文选. 矩阵的初等应用[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1996.
[3] 沈文选. 单形论导引 —— 三角形的高维推广研究[M]. 长沙:湖南师范大学出版社,2000.
[4] 沈文选. 高师数学教育专业《初等数学研究》教学内容的改革尝试[J]. 数学教育学报,1998(2):95-99.
[5] 沈文选. 数学解题与解题研究的重新认识[J]. 数学教育学报,1997(3):89-92.
[6] 沈文选. 数学教育与教育数学[J]. 数学通报,2005(9):27-31.
[7] 沈文选. 中学数学研究与中学数学教育[J]. 中学数学,2002(1):1-3.
[8] 沈文选. 中学数学教师岗位成才与教育数学研究[J]. 中学数学研究,2006(7):1-4.

中专数学中的高数知识教学方案初探

孙佳镇　　王梓华
（浙江电大海宁学院，浙江　海宁　314400）

摘　要：随着我国经济的发展需要，2004 年后的职业中专采用的诸多数学版本，已新增概率与统计初步、极限、导数和导数应用、不定积分和积分应用等高等数学的知识，我们使用分类教学、具体化教学等教学方法使学生用较少时间和精力接受较多的数学内容，在中专生学习《微积分初步》上，虽然取得了一些经验，但还有许多规律值得思考和探索.

关键词：高等数学　分类教学　具体化教学

随着我国经济的发展，在经济生活中，经常涉及"速度、增长率、最大利润"等与高等数学有关的概念，故高等数学的极限、导数和不定积分等知识日趋重要，2004 年后，职业中专采用的诸多数学版本，已新增平面向量、概率与统计初步、极限、导数和导数应用、不定积分和积分应用.

我们中专职业教学的教学管理人员和老师必须掌握这种新的形势，及时改变的教学观念和计划，改进教学方法，积极重视中专数学中高等数学部分的教学.

中专数学时间少学习任务紧. 在这么短的时间内，既要学好中专数学中的初等数学部分，又要学好中专数学中的高等数学部分，这也是一直困扰我们教师的一个难题. 特别是，海宁电视中专数学中的高等数学部分只安排 28 课时，但也要让学生掌握导数和积分知识，使他们在以后的工作中，拥有这两个有力工具.

我们探索了中专数学中高等数学部分（以下定性为"微积分初步"）的教学规律，力图解决时间短、内容多这个矛盾，力求形成"短、精、快"教学方法. 其中短指的是教学时间短；精指的是对高等数学内容进行精选；快指的是在不降低教学要求的前提下，让学生较快地理解和掌握导数和积分知识. 经过二十次小组协商、四次公开课和一年多的教学实践，我们主要做了以下工作.

1. 制定新的教学要求

（1）先讲授数列极限，后传授函数极限. 极限本身是较难传授和接受的，一个带有辩证思想的概念，如 $x\to3$ 的过程是一个 x 无限地靠近 3，它们的差距比任何想象都要小，但 x 永不等于 3. 但我们发现如果先讲授数列极限，先让学生学习函数极限，这种方式能使学生相对比较简单地接受这个概念. 这样处理也可以节约宝贵的时间，因为我们可以不必在课堂上讲解书的 13. 1 节"函数的变化率". 这种设计方法有别于我们的主课本.

（2）我们编写的辅助教材及我们的课堂设计抛弃了微积分的"$\varepsilon-\delta$"语言. 在历史上，微积分中的"$\varepsilon-\delta$"语言有一个较长的发展史，已成为高等数学发展的基石，无论如何评价它都不为过. 但这语言也是中学生难以理解的"高级语言"，一些本科生甚至数学专业的毕业生也难懂其精粹. 如果我们采用这套语言让我们电视中专生来学习，那么学生一定连自己学什么也搞不明白了.

（3）对于有界、连续和微分进行淡化处理，删除了无穷小（大）量和反函数导数. 由于微积分初步课时计划只有 28 课时，以上一些只能"忍痛割爱"，我们这样做，目的也是为了突出学习重点.

2. 抓住教学重点，理论联系实际，目的引导过程

教学重点是课程教学的核心，教师在授课时，应积极引导学生去把握它，绝对不能含糊不清. 如果教师不指出教学重点，或者强调所教内容都是重点，这对电视中专的学生们是很难去把握它的. 我们的教学主要围绕求极限，求导数和求不定积分三大块内容展开的. 而这些也是学生将来学习高等数学必须面临的

难点和重点，这些掌握好了，以后学习专科的《经济数学基础》和本科的《高等数学》（上）就不难了.

理论是对实践的概括和总结，它主要体现形式为书籍，它具有系统性、理论性，但缺乏直观性等特点. 数学在成绩不好的同学眼里是天书，如果教师授课时，如果照本宣科，讲课不生动无吸引力，学生就更没有兴趣去学了. 教学效果显然就不理想. 本课题在备课的准备过程，互相协商，尽量做到理论联系实践，尽自己所见所闻，做到了理论的阐述与生活相结合，理论与问题相结合. 主要体现在经下几点：

（1）在讲授极限概念前，第一步：让同学想想你们在何处用到或碰到过这两个中文字. 他们的体会是，有时能说或听到"我的精力已到了极限"或"我的耐心已到了极限"；有一种运动叫"极限运动"等. 第二步再说，数学上也有极限这个概念，而且在历史上先有数学中的极限概念，后才有生活中的极限说法，是生活从数学里"偷去"的. 这样的处理能调动学生学习数学一些积极性，这是一节入门课，上得好坏关系很大.

（2）在讲述第二类重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 时，我们也设计一段幽默的引言. 在历史上，谁先关心这个极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 呢？是放高利贷的人！不信？我们来看这样的一个例子.

一个放高利贷的人，一个月放贷720 000元，月利息为43 200元. 过了几个月，此人把他的"政策"改为每天放贷 720 000/30 = 24 000 元，日利息为 43 200/30 =1 440 元，这样他可以加快放贷的频率，得到更多的利润；又过了几日，得到更多的利息，他又把"政策"改为每小时放贷24 000/24 = 1 000 元，利息为 1 440/24 =60 元；进而改为每分钟放贷 1 000/60 =50/3 元，利息为 60/60 = 1 元；每秒钟放贷5/18 元，利息为1/60 元……如此下去，设他的本钱是720 000，则他一个月可以收获多少利息呢？

也许在几千年前，就有人碰到过此类问题，但他们显然是无能为力的. 但我们现在却有能力来解决它，让我们学习公式 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e,\cdots$.

（3）人常说"人生糊涂识字始"，在学习数学知识的时间也会碰到此类相似问题. 比如同学们在教室里都理解速度和坡度，但今天要出了这个教室就不一定能说清这两个概念了. 什么叫速度？一般人是这样理解的：甲物体一小时运行120千米，乙物体一小时运行5千米，则甲物体速度快. 这种认识是错的！其实甲物体前10秒钟运行了1千米，接着的50秒是静止的，最后59分钟运行了119千米，而乙物体前1分钟运行了5千米，后59分钟是静止的. 此时我们就会发现我们是无法比较甲乙两物体的速度的！同样，我们如何给机器人说明速度和坡度这两个概念呢？当全世界人都认为速度、坡度和光滑很好解释时，英国伟大的数学家牛顿开始迷惑了，为了解决牛顿迷惑之处，让我们学习数学发展史的一个辉煌——导数.

有时，我们把目的先告诉大家，把成果先展示给学生，然后再引导学生如何取得成果，这种处理方法虽然"功利性"很强，但效果却不错. 这就是目的引导过程. 我们设计以下问题让同学们思考：如何求非二次曲线的切线？抛物线在顶点的切线为什么是平的？一元三次函数图像的走向如何？如何向机器人说明"光滑"的意思？函数单调性的判定是一个较难的问题，高数是如何轻松解决的？

3. 分散学习难点

我们研究自认为最得意之处，就是在《微积分初步》教学实施了分类教学和形象教学，这样可以大大减轻一些学习难点.

3.1 分类教学

（1）我们把求极限常用方法分成6类，并取了直截了当的名称.

① 直接代入法. 其特点是：分母不趋于0；直接代入成功，如 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-1}{2x^2-3}$.

② 因式分解法. 其特点是：直接代入不成功；分母分子都趋于0（简称"$\frac{0}{0}$"型），它们一般为能因式分解的二次多项式；自变量趋于有限，如 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2-4x-5}$.

③ 分子分母同除以重量级法. 其特点是：直接代入不成功；自变量一般趋于无穷（∞）；分子分母都有一些趋于无穷的数（俗称很大（小）很大（小）的数），如 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2-4x+5}$.

④ 分子分母同理化法. 其特点是：自变量一般

趋于有限；“$\frac{0}{0}$”型；分子或分母有根号，如$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$.

⑤ 正弦抵消法，即$\lim_{*\to 0}\frac{\sin *}{*}=1$法（其中“ * ”为含自变量的计算式，下同）. 其特点是：“$\frac{0}{0}$”型；有正弦函数，且正弦角趋于 0，如$\lim_{x\to 1}\frac{\sin[2(x-1)]}{x^2-1}$.

⑥ $\lim_{*\to 0}(1+*)^{\frac{1}{*}}$法. 其特点是：“$(f(x))^{g(x)}$”形状（即底有运动的量，指数上有运动的量）；$1^{\infty}$形状. 如$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x-1}$.

通过极限的分类教学，把看似无章法的极限求法分成 6 大类. 当学生拿到一个极限题，他可以从极限题目的特点着手，分析是何类极限题，迅速解答此题. 此法对于基础差的学生，特别有用. 对于基础扎实的学生，也能通过等价变形找到求解其他类型的题目.

（2）本课题把凑微分法分成 3 类.

①d 内可加减任何常数. 如$\int(x-9)^5dx$.

②d 内数乘（常数乘），外面配平. 如$\int\frac{1}{(2x-3)^3}dx$.

③ 凑微分的过程是不定积分的过程，但不必带常数 c. 如$\int\frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

3.2　具体化教学

我们有时把抽象的公式进行具体化，效果的确不错.

① 复合函数求导法则是电视中专学生学习上的一个难点，他们难以理解其中的含义和应用. 在具体应用公式$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$中，学生在确定$f(x)$和$\varphi(x)$有很大困难，分不清$f'(x)$与$f'(\varphi(x))$、$(f(\varphi(x)))'$有什么区别与联系. 在教学实践的基础上，我们把复合函数求导法则具体为$(\sin *)'=\cos *\times *'$、$(\cos *)'=-\sin *\times *'$、$(*^{\alpha})'=\alpha *^{\alpha-1}\times *'$、$(e^*)'=e^*\times *'$和$(\ln *)'=\frac{*'}{*}$. 其中 * 为自变量的函数（即关于 x 的一个计算式）. 这组公式与基本初等函数的导数相比，原 x 处全部改为 * ，后面再乘以 $*'$，所以在学生背诵方面，没有增加学生的负担. 学生在求复合函数导数时，只要对号入座，就能迅速找到定理中的$f(x)$，余下的全部归人为“ * ”，这样无需找到已被抽象化的$f(x)$. 同时我们向学生指出，如果欲求导的式子的最后运算是“+，-，×，÷”的话，因先用相应的四则运算的求导公式来处理.

② 在不定积分的凑微分学习中，学生也同样碰到此类问题. 在

$$\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=F(\varphi(x))+c$$

$$(若\int f(x)dx=F(x)+c)$$

公式中，学生更难于找到$\varphi(x)$和$f(x)$. 对于学生普遍存在的问题，我们提出一套具体化了的凑微分公式：

$$\int *^{\alpha}d*=\frac{1}{\alpha+1}*^{\alpha+1}+c\ (\alpha\neq -1)$$

$$\int 1d*=*+c$$

$$\int\sin *d*=-\cos *+c$$

$$\int\cos *d*=\sin *+c$$

$$\int e^* d*=e^*+c$$

$$\int\frac{1}{*}d*=\ln|*|+c$$

结合凑微分的三大类型，学生普遍反映上述公式容易理解.

4. 丰富的语言有助于教学

为了充分利用好每一宝贵的课时，我们经常在一起商讨如何展开教学. 力求尽自己的能力做得最好，发现把抽象的高等数学知识“具体化”、“通俗化”，能改进学生学习的效果. 特别在讲授抽象、枯燥的概念时，可以用图表 \ 也可以用幽默 \ 比喻 \ 押韵的句子，还可以把某个数学知识点化为笑话进行传授，只要效果好，我们都可以试试. 在讲授相乘的导数法则时，我们可以这样说，我们多么希望相乘的导数等于导数的相乘，可惜它是不成立的. 相乘的导数法则是什么?它等于第一个导数乘以第二个“休息”，加上第一“休息”乘以第二个导数，它们是轮流休息，这个在生活也是常见——“两班倒”. 即

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

如何使学生用较少时间和精力接受较多的数学

内容，是我们老师面临的问题. 在中专生学习《微积分初步》上，我们虽然取得了一些经验，但显然还有许多规律值得我们思考和探索.

参考文献

[1] 李林曙，黎诣远. 经济数学基础[M]. 北京：高等教育出版社，1998.
[2] 同济大学数学教研室. 高等数学（上册）[M]. 4 版. 北京：高等教学出版社，1996.
[3] 教育部考试中心组.（专升本）高等数学（二）考试参考书[M]. 北京：中央广播电视大学出版社，2000.
[4] 唐国兴. 高等数学（二）第二分册概率统计[M]. 2 版. 武汉：武汉大学出版社，1999.
[5] 沈琪芳，童少颖. 自主学习与导学论稿[M]. 北京：中央广播电视大学出版社，2004.
[6] 张顺燕. 微积分的思想和方法[M]. 北京：中央广播电视大学出版社，2001.

作者简介

孙佳镇，男，1972 年 1 月出生，职称：中教一级，现任教于浙江广播电视大学海宁学院，长期从事本院中专数学、中央电大大专及函授大专经济数学的教学工作；在教学工作中略有成就，曾被评为 2004 年海宁市优秀教师；2006 年海宁市师德建设先进个人；2007 年嘉兴电大系统先进工者。

一道不等式竞赛题的简证与探讨

黄道军
（湖北省宣恩县第一中学，湖北　宣恩　445500）

摘　要：本文对一道不等式竞赛题给出了简单证明，并作出了一些探讨.

关键词：不等式　简证　探讨

在《高中数学同步·竞赛分级练·二年级》（刘诗雄、郭希连主编，陕西师范大学出版社，2002年7月第1版）中有这样一道题：设 $a\geqslant b\geqslant c>0$，求证：$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+abc\geqslant a+b+c+1$.

原书中对题1给出的解答需要较高的技巧，为了节省篇幅，略去摘录，下面先给出一个简单证明，再对一些相关问题进行一些探讨，并提出两个相关思考题.

证明　由已知得 $a-b\geqslant 0,b-c\geqslant 0,a-c\geqslant 0,abc>0$，于是有

$$0\leqslant\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}=$$
$$\frac{(a-b)(b-c)}{bc}-\frac{(a-b)(b-c)}{ab}=$$
$$(\frac{a}{b}-1)(\frac{b}{c}-1)-(1-\frac{b}{a})(1-\frac{c}{b})=$$
$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}-\frac{a}{b}-\frac{b}{c}-\frac{c}{a}$$

所以 $$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

所以 $$3(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})\geqslant 2(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})+(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\qquad(1)$$

又由平均值不等式即得

$$\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+abc\geqslant 3b$$
$$\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+abc\geqslant 3a$$
$$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+abc\geqslant 3c$$
$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant 3$$

将这四式相加得

$$2(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c})+(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})+3abc\geqslant 3(a+b+c)+3\qquad(2)$$

由式(1)、(2)两个同向不等式相加，整理即得

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+abc\geqslant a+b+c+1$$

显然上述不等式取等号当且仅当 $a=b=c=1$，从而题1得证.

探讨1　当 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d>0$ 时，有 $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$.

证明　在题1的证明中，已得到：当 $a\geqslant b\geqslant c>0$ 时，有

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

现有 $a\geqslant b\geqslant c>0,a\geqslant b\geqslant d>0,a\geqslant c\geqslant d>0,b\geqslant c\geqslant d>0$，可得四个类似的同向不等式，它们相加整理即得所求.

思考题1　当 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$ 时，是否成立

$$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}\geqslant\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

探讨2　当 $1\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$ 或 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 1>0$ 时，成立

$$\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_{n-1}}+\frac{a_1}{a_n}+\prod_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i+1\qquad(3)$$

引理　当$1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$或$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 1 > 0$时有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} a_i + n - 1 \tag{4}$$

用数学归纳法及一次函数的单调性容易证明(此处略).

证明　由引理及条件,即得

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n} + \prod_{i=1}^{n} a_i \geq$$
$$n\sqrt[n]{\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_1}{a_n}} + \prod_{i=1}^{n} a_i =$$
$$n + \prod_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} a_i + 1$$

从而式(3)得证.

思考题2　当$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0$时,式(3)是否成立?

作者简介

黄道军,男,1968年出生,1990年毕业于湖北师范学院数学系.湖北省宣恩县第一中学高级教师,湖北省恩施自治州数学学会常务理事.一直从事高中数学教学.曾经在《中学数学》2000年第5期上发表"对一条考试要求的理解",在《中学数学研究》(江西)2003年第11期上发表"改进上限 统一并加强两个不等式",在《数学通报》2006年第4期上发表"改进一个含参的多变量分式不等式".

向量在椭圆共轭直径问题中的应用

江嘉秋

（福州教育学院，福建 福州 350001）

摘 要：本文从一道高考题的背景出发，得出用向量描述椭圆的一种表达式，以及椭圆的切线的一种表达式，并思考用向量方法研究与椭圆共轭直径的相关性质.

关键词：椭圆 共轭直径 共轭向量

2005高考理科数学全国卷Ⅰ中的第21道试题：

已知椭圆的中心为坐标原点O，焦点在x轴上，斜率为1且过椭圆右焦点F的直线交椭圆于A,B两点，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$与$\vec{a}=(3,-1)$共线.

（Ⅰ）求椭圆的离心率；

（Ⅱ）设M为椭圆上任意一点，且$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$，证明$\lambda^2+\mu^2$为定值.

其中的第2个问题的结论是耐人寻味的！

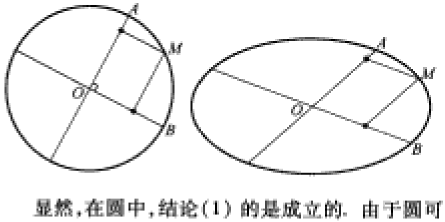
若A,B两点坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则容易验证，A,B两点坐标满足$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0$，由此得知，$A,B$两点分别是椭圆一对共轭直径的两个端点[2].

因此我们猜想有一般性的结论：

设椭圆的中心为原点O，若A,B分别是椭圆一对共轭直径的两个端点，则M为椭圆上的点的充要条件是$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R},\lambda^2+\mu^2=1)$，或

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}\cdot\cos\theta+\overrightarrow{OB}\cdot\sin\theta \qquad (1)$$

对这一结论，可以从圆与椭圆的关系作出直观的解析.



显然，在圆中，结论（1）的是成立的. 由于圆可以通过伸缩变换得到椭圆，而伸缩变换把平行直线变到平行直线，并且保持两平行线上的线段的比不变，因此（1）的结论具有不变性．下面证明这个结论.

证明 （充分性）设椭圆为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(x,y)$.

由于A,B是椭圆共轭直径的两个端点，因此$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0$. 又由于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$在椭圆上，所以$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$.

于是，有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}&=\overrightarrow{OA}\cdot\cos\theta+\overrightarrow{OB}\cdot\sin\theta=\\&(x_1,y_1)\cos\theta+(x_2,y_2)\sin\theta=\\&(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta,y_1\cos\theta+y_2\sin\theta)\end{aligned}$$

由此

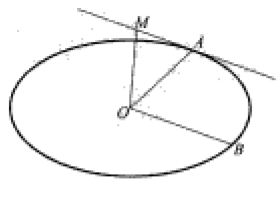
$$\frac{(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(y_1\cos\theta+y_2\sin\theta)^2}{b^2}=$$

$$\frac{x_1^2\cos^2\theta+x_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{y_1^2\cos^2\theta+y_2^2\sin^2\theta}{b^2}+$$

$$2\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}\right)\sin\theta\cos\theta=$$

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\times0\times\sin\theta\cos\theta=1$$

所以点M在椭圆上；



必要性证明略.

类似的，我们还可以给出椭圆的切线的一种向量表示：

设椭圆的中心为原点 O，A，B 分别是椭圆一对共轭直径的两个端点，则点 M 在过 A 的切线上的充要条件是

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}\quad(\lambda\in\mathbf{R})\qquad(2)$$

说明：只需证，过 A 点平行于 OB 的直线为椭圆的切线. 由 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}(\lambda\in\mathbf{R})$，若点 M 在椭圆上，则由结论(1)得 $1^2+\lambda^2=1$，所以 $\lambda=0$，此时点 M 与点 A 重合，即过点 A 且平行于 OB 的直线与椭圆有且只有一个点，故得证.

上述结论为我们用向量理解和研究椭圆的一些性质提供了工具.

为了方便，不妨将结论(1)、(2)中向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 称之为椭圆的一对共轭向量. 为此，我们可以从代数角度对椭圆的一对共轭向量进行定义：

设椭圆为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的中心为原点 O，点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 在椭圆上，若 $(\frac{x_1}{a},\frac{y_1}{b})\cdot(\frac{x_2}{a},\frac{y_2}{b})=0$，则称向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 是关于椭圆的两个互为共轭的向量.

在这一定义下，结论(1)，(2)显然是成立的，而且我们还可以利用它推演与椭圆的共轭直径以及切线的相关性质，这里就不阐述了. 下面结合定义，自编几道高中数学试题，供参考.

1. 平面直角坐标系中，O 为坐标原点，已知两点 $A(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(-1,\frac{3}{2})$，若点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda\in\mathbf{R}$，则点 M 的轨迹是（　）

A. 直线 AB

B. 椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

C. 过点 B 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线

D. 过点 A 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线

2.（2006 年福州市高考数学模拟试卷）

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两点，且向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 互为共轭向量，O 为坐标原点.

(1) 若点 A 坐标为 $(a,0)$，求点 B 的坐标；

(2) 设 M 为椭圆上任意一点，且 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，证明 $\lambda^2+\mu^2$ 为定值.

(3) 若点 P，Q 为椭圆上的两点，且 $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{OB}$，试问：线段 PQ 能否被直线 OA 平分，试加以证明.

附证第(3)小题：

方法一：设 $\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+\mu_1\overrightarrow{OB}(\lambda_1,\mu_1\in\mathbf{R})$，$\overrightarrow{OQ}=\lambda_2\overrightarrow{OA}+\mu_2\overrightarrow{OB}(\lambda_2,\mu_2\in\mathbf{R})$.

由(2)得 $\lambda_1^2+\mu_1^2=1$，$\lambda_2^2+\mu_2^2=1$. 则

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{OA}+(\mu_1-\mu_2)\overrightarrow{OB}$

因为 $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{PQ}=m\overrightarrow{OB}(m\in\mathbf{R})$

即 $(\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{OA}+(\mu_1-\mu_2)\overrightarrow{OB}=m\overrightarrow{OB}$

又因为 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 非零且不平行，所以 $\lambda_1-\lambda_2=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$.

所以 $\mu_1^2=\mu_2^2$，而 $\mu_1\neq\mu_2$，所以 $\mu_1+\mu_2=0$.

所以 $\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OP}=(\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{OA}+(\mu_1+\mu_2)\overrightarrow{OB}=(\lambda_1+\lambda_2)\overrightarrow{OA}$.

故线段 PQ 被直线 OA 平分.

方法二：设点 $P(m_1,n_1)$，$Q(m_2,n_2)$，则 $\overrightarrow{PQ}=(m_2-m_1,n_2-n_1)$，且 $\frac{m_1^2}{a^2}+\frac{n_1^2}{b^2}=1$，$\frac{m_2^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}=1$.

所以 $\frac{(m_1-m_2)(m_1+m_2)}{a^2}+\frac{(n_1-n_2)(n_1+n_2)}{b^2}=0$

所以 $(m_1-m_2,n_1-n_2)\cdot(\frac{m_1+m_2}{a^2},\frac{n_1+n_2}{b^2})=0$.

因为 $\overrightarrow{PQ}\parallel\overrightarrow{OB}$ 而 $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$，所以 $(x_2,y_2)\cdot(\frac{m_1+m_2}{a^2},\frac{n_1+n_2}{b^2})=0$.

又向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 互为共轭向量，即 $(\frac{x_1}{a},\frac{y_1}{b})\cdot(\frac{x_2}{a},\frac{y_2}{b})=0$.

所以 $\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0$，得

$$(x_2,y_2)\cdot(\frac{x_1}{a^2},\frac{y_1}{b^2})=0$$

所以 $(\frac{m_1+m_2}{a^2},\frac{n_1+n_2}{b^2})=\lambda(\frac{x_1}{a^2},\frac{y_1}{b^2})$

所以 $(\frac{m_1+m_2}{2},\frac{n_1+n_2}{2})=\frac{\lambda}{2}(x_1,y_1)$.

故线段 PQ 被直线 OA 平分.

3.（2006 年福州市质检理科数学试卷）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的两点，满足 $(\frac{x_1}{b},\frac{y_1}{a})\cdot(\frac{x_2}{b},\frac{y_2}{a})=0$，椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，短轴长为 2，O 为坐标原点.

（1）求椭圆的方程；

（2）若直线 AB 过椭圆的焦点 $F(0,c)$（c 为半焦距），求直线 AB 的斜率 k 的值；

（3）试问：三角形 AOB 的面积是否为定值？如果是，请写出推理过程；如果不是，请说明理由.

参考文献

[1] 蒋声. 几何变换[M]. 上海：上海教育出版社，1981.

[2] 陈振宣，等. 数学题解辞典 —— 平面解析几何[M]. 上海：上海辞书出版社，1982.

作者简介

江嘉秋，男，1963 年 8 月生，福建福州人，福建师大函授学院数学系毕业，华东师大教育科学学院课程与教学论专业结业，福州教育学院数学科教研员，全国初等数学研究会常务理事兼副秘书长，《初等数学研究》杂志编辑部副主任，福建省数学会初等数学分会常务理事兼副秘书长，曾获福建省第三届数学教育教学及初等数学学术论文一等奖，研究方向：中学数学课程与教学论.

初等数学问题与课题

杨 之

（天津宝坻区教研室，天津 310800）

问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不可否认的。只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力；而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止。

——希尔伯特

中国人应该搞中国自己的数学，不要老是跟着人家走。中国数学应该有自己的问题，即中国数学家在中国本土上提出，而且加以解决的问题。

——陈省身

初等数学作为现代数学的一个重要组成部分（根基），还要大发展，正在大发展，现在至多是她的青年期，初等数学的资源是无穷无尽的。

——杨之、劳格

1991 年 8 月，我曾在全国首届初等数学研究学术交流会上，做过一个《初等数学问题》的报告（发表于由杨学枝、林章衍主编，福建教育出版社 1993 年 7 月出版的《福建省初等数学研究文集》中），其中所提的 24 个问题，1993 年发展成 182 个 whc（问题、课题或猜想），汇成《初等数学研究的问题与课题》，由湖南教育出版社出版，应当说，这是责编郑绍辉先生高瞻远瞩的结果。至今，14 年过去了，182 个问题相当多的一部分已被解决或推进，也有的成为我国初数界研究的热点（我们期待着能有一个研究解决情况的综述）。

2005 年，郑绍辉先生希望能出一个《问题与课题》的续集，我们着手搜集和筛选新的问题，可惜后来由于恐怕印数上不去，只好作罢。然而这些问题本身是非常珍贵的。这里，我们再次提出，并编入 whc 系列（凡与现有的 182 个 whc 有关的，以加“′”表示，凡是新的，则往后续）。

whc 21′ 关于一般闭折线整体性、拓扑性和其他结构特征的研究，又提出如下具体问题[1]：

（1）设 $\theta_0(n)$ 表示 n 边闭折线 Z_n 的最大自交数，那么，是否对任何正整数 k：$0 < k < \theta_0(n)$，都存在 Z_n，使 $\theta(Z_n) = k$？由于已证得：不存在自交数为 4 的 Z_5 和自交数为 13 的 Z_7，因此，回答是否定的。问题应提成：对哪些 n 和 $k(n,k \in N, 0 < k < \theta_0(n))$ 存在或不存在使 $\theta(Z_n) = k$ 的 Z_n？

（2）以 $S(Z_n)$，$\theta(Z_n)$，$H(Z_n)$ 分别表示 Z_n 的双折数（双折边的条数）、自交数和环数，则：

① 对同一条 Z_n，S，θ 和 H 有何关系？

② 以 $S_0(n)$ 表 Z_n 的最大双折数，$h(n)$ 和 $H_0(n)$ 分别表示最小与最大环数，则对整数 $k \in [0, S_0(n)]$，$l \in [0, \theta_0(n)]$，$m \in [h(n), H_0(n)]$ 是否存在 Z_n，使得 $S(Z_n) = k$，$\theta(Z_n) = l$，$H(Z_n) = m$？若存在，是否唯一？何时存在且唯一？

（3）S，Q，H 足以描述 Z_n 的复杂程度吗？还有无别的概念（如不同层次的内点、内部）和相应的指标用以描述其复杂性？

[1] 杨之. 双折数、自交数与环数——封闭折线复杂性的三项指标[J]. 中学数学，1999.

whc183. 关于闭折线可对称化问题[2][3].

如不改变闭折线的自交数和任一边的折性，而通过适当改变边的长度和顶角大小，能把它画成轴（中心）对称图形，就称其为可轴（中心）对称化的闭折线。

（1）关于可轴对称化问题. 以 S 和 d 分表双折边和单折边，则 Z_n 可用 n_d 个 d，n_S 个 $S(n_d, n_S \in \mathbf{Z}^+$，$n_S$ 为偶数，$n_d + n_S = n \geq 3)$ 构成的环形排列：(S,d) 排列来表示. 我们已经证明了 Z_n 可轴对称化的充要条件：它的 (S,d) 排列可从某处断开成为对称的线排列，或可从某两处断开，成为各含偶数个 S 的对称线排列。

如称满足如上条件的 (S,d) 为可划分的，那么问题是 Z_n 的 (S,d) 排列何时是可划分的？

只获得了零星结果，一般尚未解决.

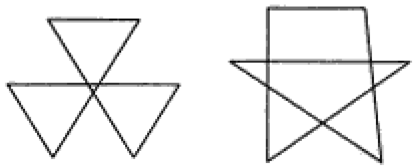
（2）关于可中心对称化问题. 由于单折边不是中

心对称的，所以中心对称闭折线必有偶数条单折边（从而，必有偶数条边），仍以 d 表单折边，而 Z 和 S 分别表双折边中的左旋边和右旋边，于是一条闭折线 Z_n（n 为偶数），可以用一个含有相同个数的 Z 和 S，以及偶数个 d 的环排列（ZdS）表示. 于是得到：

若闭折线 $Z_{2k}(k\in\mathbf{N},k\geqslant 2)$ 可中心对称化，则在其边的（ZdS）环排列中：

若干对 Z,S 处于对称位置（即每侧相隔 $k-1$ 条边），Z 相邻的是一对 S 或一对 d，S 相邻的是一对 Z 或一对 d. 或每对 d、每对 S、每对 Z 都处于对称位置.

但这显然不是充分条件，因为，比如，排 $dddddd$ 表示的 Z_6 中，除了一个凸六边形可中心对称化以外，还有如下图所示的不可中心对称化的两条 Z_6. 但是猜想，在符合条件 Ⅰ 或 Ⅱ 的 Z_{2k} 中，必有可中心对称化者.



问题是：闭折线可中心对称化的充要条件是什么？其（ZdS）排列满足的充要条件是什么？

[2] 杨之. 关于闭折线"可对称化问题"[J]. 中学数学教学参考，1999.
[3] 李富刚，杨之. "闭折线可中心对称化"问题初探[C]. 全国四届初数会交流论文，2000.

whc184. 关于周期数阵[4]. 周期数阵有两种不同的定义：

定义 1 对数阵 $\{f(i,j)\}$ 来说，如对任意 i，存在最小数 $T_i\in\mathbf{N}$，使得 $f(i,j+T_i)=f(i,j)$，同时，对任意的 j，存在最小数 $U_j\in\mathbf{N}$，使得 $f(i+U_j,j)=f(i,j)$，则 $\{f(i,j)\}$ 叫做以 T_i 为行周期、U_j 为列周期的周期数阵. 若 $\{T_i\}$、$\{U_j\}$ 分别为以 t 和 u 为周期的周期数列，则 $\{f(i,j)\}$ 为 (t,u) 正规周期数阵.

定义 2 如果存在常数 $k,l\in\mathbf{N}$，使得对任何的 $i,j\in\mathbf{N}$，都有 $f(i+k,j+l)=f(i,j)$，则 $\{f(i,j)\}$ 叫做以 (k,l) 为周期的周期数阵.

定义 1 较为严格，但表述较繁；定义 2 表述简单，但很宽泛. 我们的问题是：

（1）两个定义有何关系？哪个更适当？

（2）是否任何 (T_i,U_j) 周期数阵都是正规的？若不然，正规的条件是什么？

（3）怎样定义 $n(n\geqslant 3)$ 维周期数阵？

[4] 杨之. 周期数阵[J]. 湖南数学通讯，1995.

whc185. 裴氏数阵的"主一"性[5]. 斐波那契数列有非常丰富的性质，作为其推广的斐波那契数阵，理应具有更加丰富的性质. 以下即为一例：设 $F=\{f_{ij}\}$ 为斐波那契数阵，记

$$D_n=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n}\\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}\end{vmatrix}$$

则 D_n 称为 F 的 n 阶主子式，已证明了 $D_n=1\ (n=1,2,3,\cdots)$，因此，F 称为"主一数阵"（各阶主子式都等于 1 的数阵）. 记

$$b_{ij}=\begin{vmatrix} f_{ij} & f_{i,j+1}\\ f_{i+1,j} & f_{i+1,j+1}\end{vmatrix}\quad (i,j=1,2,3,\cdots)$$

则称 $F_1=\{b_{ij}\}$ 为 F 的（1 次）生成数阵，称 F_1 的生成数阵 F_2 为 F 的 2 次生成数阵，等. 则：

（1）猜想：F 的各次生成数阵 $F_1,F_2,\cdots,F_k,\cdots$ 均为主一数阵；

（2）如果一个数阵本身及其直到 k 次的生成数阵均为主一数阵，则称之为 k 次主一数阵. 试问：除 F 外，有无其他 k 次主一数阵？如何判别？

[5] 孙四周. 二维斐波那契数阵的一个性质[J]. 中学数学教学参考，1999.

whc186. 幻方的计数问题. 幻方也叫纵横图，起源于中国的"河图". 其定义是：将自然数 $1,2,\cdots,n^2$ 分别填入具有 n^2 个格子的正方形 $n\times n$ 格图中，使每行、每列、两条主对角线上的数之和都相等，就形成 n 阶幻方. 现已得知1阶幻方有1个，2阶幻方有0个（不存在），3 阶实质上不同的幻方有 1 个，4 阶的有 880 个，5 阶的有 275 305 224 个.

问题是：实质上不同（即经过旋转、翻折不能重合）的 $n(\geqslant 6)$ 阶幻方有多少个？能拿出一个计数公式？

whc187. 一类环形排列的计数. 张忠辅教授 2000 年初由图论研究中，提出如下圆（环形）排列问题：由自然数 $(1,2,3,\cdots,n)$ 构成 $t=P_n^2$ 个数偶 (i,j) $(i\neq j)$，将它们作成一个 t 元环形排列：规定 (i,j) 与

(k,l) 相邻当且仅当 $i=k$(前同),或 $j=k$(中同),或 $i=l$(外同). 求所有这样的 t 元环形排列的个数 $\pi(n)$.

比如,当 $n=3$ 时,$t=P_3^2=6$ 个数偶:(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2). 可按条件做出排列

{(1,2)(2,1)(1,3)(3,1)(3,2)(2,3)}

{(1,2)(1,3)(3,2)(2,1)(2,3)(3,1)}

故 $\pi(3)=2$.

猜想:$\pi(n)=\begin{cases}\dfrac{3n-5}{2}, n\equiv 1 \pmod 2\\ \dfrac{3n-4}{2}, n\equiv 0 \pmod 2\end{cases}$

whc188. 集合的分拆. 设 $S=\{x_1,\cdots,x_n\}$,$A_1,\cdots,A_m\subseteq S$,如果 $S=A_1\cup\cdots\cup A_m$,则有序 m 元组 $(A_1,\cdots,A_m)$ 称为 S 的一个 m 有序分拆,有序分拆个数记作 $U(n,m)$;无序组 $\{A_1,\cdots,A_m\}$ 称为 S 的一个 m 无序分拆. 个数记作 $W(n,m)$. 这是一类具有组合性质的数论问题. 文献[6] 应用 0 - 1 矩阵方法证明了

$$U(n,m)=(2^m-1)^n$$

作为推论得到 $W(n,2)=\dfrac{1}{2}(3^n+1)$,并进而得到

$$W(n,3)=3^n+\frac{1}{6}(7^n-3^{n+1}+2)$$

那么我们问:$W(n,m)$ 等于多少 $(n,m\in N,m\geqslant 4)$?

[6] 徐学文. 集合的分析[J]. 数学通讯,1993.

whc189. 高阶组合数[7]. 从 C_c^b 个元素中选取 a 个的方法数,称为由 a,b,c 构成的二阶组合数. 记作

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix}\\a\end{pmatrix}=C_{C_c^b}^a=(c;b;a)=\frac{\left(\dfrac{c!}{b!(c-b)!}\right)!}{a!\left(\dfrac{c!}{b!(c-b)!}-a\right)!}$$

可归纳地定义

$$(a_1;a_2;\cdots;a_n)=((a_1;a_2;\cdots;a_{n-1});a_n)$$

$C_{C_c^b}^a$ 也可理解为从 c 元集合中,选取 a 个 b 元子集的方法数. 显然,按它的公式直接计算是太困难了,而且难于弄清它的性质. 文[7] 研究了将其展开,以便于计算的问题. 已求得

$$(n;1;2)=1\cdot C_n^2$$

$$(n;2;2)=3\cdot C_{n+1}^4$$

$$(n;3;2)=6\cdot C_{n+2}^6+3C_{n+1}^6+C_n^6$$

一般地

$$(n;b;2)=\sum_{j=1}^{b}C_{C_{4j+e_j}^2}^2C_{n+b-j}^{2b}$$

$$e_j=\begin{cases}1,n\text{ 为奇数}\\0,n\text{ 为偶数}\end{cases}$$

另外两个展开式是

$$(n;b;2)=\sum_{k=0}^{b-1}C_{C_{4k+e_k^b}^2}^2C_{n+k}^{2b}=\sum_{j=1}^{b}C_{2j-1}^{j}C_{b+j}^{2j}C_n^{b+j}$$

$$e_k^b=\begin{cases}0,b\equiv k\pmod 2\\1,b\not\equiv k\pmod 2\end{cases}$$

对 $(n;b;3)$ 也找到了 n 个展开式,如

$$(n;2;3)=C_{n+1}^6+13C_{n+2}^6+C_{n+3}^6=C_n^3+16C_n^4+30C_n^5+15C_n^6$$

等. 问题是:

(1) $(n;b;a)$ 有什么性质?当 $a\geqslant 3$ 时,展开式是什么?

(2) 设 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$($n_1,\cdots,n_k$ 为正整数),称为 n 的一个 k 项分拆. 那么,使 $(n_1;n_2;\cdots;n_k)$ 达到最大的分拆是什么?

[7] GOLOMB S W. 叠二项式系数[M]// 丁石孙. 邮票·自行车·果园·雨中行. 北京:北京大学出版社.

whc 190. 广义邮票问题[8]. 问题是这样的:

求一个 k 项的递增自然数列 $\{b_i\}$,它的项(可重复取用)通过"+"构成至多 h 项的算式,能表示个数最多的连续自然数 $1,2,3,\cdots,n(=T(k,h))$ 中的任何一个.

通常,在 $\{b_i\}$ 中,加入一张虚拟的"零值"邮票,这样,每个信封上均可帖上 h 张. 例如:可求出 $n=T(3,2)=8$. $\{b_i\}=\{0,1,3,4\}$:

$1=0+1,2=1+1,3=0+3,4=0+4$ 或 $1+3$

$5=1+4,6=3+3,7=3+4,8=4+4$

解集 $\{b_i\}$ 未必唯一,如 $n=T(6,2)=20$,解集竟有 5 个

{0,1,2,5,8,9,10}

{0,1,3,4,8,9,11}

{0,1,3,4,9,11,16}

{0,1,3,5,6,11,14}

{0,1,3,5,7,9,10}

显然

$T(k,1)=k, \{b_i\}=\{0,1,\cdots,k\}=\{1,2,\cdots,k\}$

$T(1,h)=h, \{b_i\}=\{0,1\}$

斯托赫、亨利奇、斯唐顿等人独立得到

$$T(2,h)=\left[\frac{1}{4}(h^2+6h+1)\right]$$

($[x]$ 表不超过 x 的最大整数)

$$\{b_i\}=\begin{cases}\{0,1,\frac{1}{2}(h+3)\}\ (h\text{ 为奇数})\\ \{0,1,\frac{1}{2}(h+2)\}\text{ 及}\{0,1,\frac{1}{2}(h+4)\}\ (h\text{ 为偶数})\end{cases}$$

对于 $k=3$, Hofmeister 找到了它的上下界：

$$\frac{4}{81}h^3+\frac{2}{3}h^2+\frac{66}{27}h\leqslant T(3,h)\leqslant$$

$$\frac{4}{81}h^3+\frac{2}{3}h^2+\frac{71}{27}h-\frac{1}{81}\ (h\geqslant 34)$$

其下界在 $h\equiv 0(\bmod 9)$ 时达到.

这广义邮票问题由来已久，能找到的最早文献是 Rohrbach1936 年的文章，关于数阵 $\{T(k,h)\}$，已有结果是：

T \ h / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	2	4	7	10	14	18	23	28	34	40	47	54	62	70
3	3	8	15	26	35	52	69	89	112	146	172	212	259	302
4	4	12	24	44	71	114	165	234	326	427	547	708	873	1 094
5	5	16	36	70	126	216	345	512	797					
6	6	20	52	108	211	388								
7	7	26	70	162										
8	8	32	93	220										
9	9	40	121											
10	10	46	154											
11	11	54												
12	12	64												
13	72													

按表中数的变化趋势，可看出：$T(9,2)=40$ 不对，就是 $T(9,2)=38$，又 $T(13,2)$ 应是 74 而不是 72. 是这样吗？

另外，亨利奇还找到

$T(14,2)=80, T(15,2)=92, T(16,2)=104$

$T(17,2)=116, T(18,2)=128$

(因用的是经验方法，得到的可能是下界). 另外，约汉·贝塔还求得了

k	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$T(k,3)$	354	418	476	548	633	714	805	902	1 012

24	25	26	27	28	29	30	31
1 127	1 254	1 382	1 524	1 678	1 841	2 010	2 188

32	33	34	35	36	37	38	39
2 382	2 584	2 081	3 020	3 256	3 508	3 772	4 043

40	41	42	43	44	45	46	47
4 326	4 628	4 941	5 272	5 606	5 960	6 334	6 723

之所以把 $T(k,h)$ 的零星结果都列出来，是由于计算起来，像拉姆赛数一样艰难，因此，也像拉姆赛数一样珍贵.

另外，阿特尔和巴尔耐特还导出一个 $k=h$ 时的美妙的下界：

$T(k,k)\geqslant f_{2k}-1$ (f_{2k} 是第 $2k$ 个斐波那契数)

这个广义邮票问题，困难异常，也丰富异常，对此，[8] 提出了一系列问题，我们提若干如下：

(1) 对 $k\geqslant 4$, $T(k,h)$ 介于哪两个多项式之间？

(2) 数阵 $\{T(k,h)\}$ 有何性质？有否通项公式？通项公式是什么？

(3) $T(k,h)$ 与 $T(h,k)$ 有何关系？

(4) 对固定的 k,n，问题共有多少个解？

[8] R ALTER, BARNETT J A. 邮票问题[M]// 丁石孙. 邮票·自行车·果园·雨中行. 北京：北京大学出版社.

whc 191. 麻将牌问题[9]. 1997 年 11 月，在武汉召开的全国四届 P. M 会议上，齐民友先生提出一个妙趣横生的问题：

一手麻将牌见万就和(hú)，问是什么牌？我们知道，通常的麻将牌包括：1～9 万各 4 张，1～9 条各 4 张，1～9 饼(筒)各 4 张，东西南北中发白各 4 张，共 136 张. 有的还加上 4 张"混儿"，可以"当成"任何一张牌，以加大灵活性. 这样共 140 张牌. "打"麻将一般是 4 人，每人抓到手的一手牌是 13 张，中间可以通过"抓进 — 打出"或"吃进 — 打出"进行调整，但总保持 13 张. 一直调整到再来(抓到或吃进)一张牌(这时共 14 张)就和(hú)为止.

而所谓"和"是指：在 14 张牌中，有对相同(叫"将牌")，其余 12 张构成 4 个"连"：每个连或是 3 张相同的(叫做"横连"，如 3 张一万或 3 张西风均可)，或三张花色相同的连续牌(叫纵边，如二、三、四万，一、二、三条，七、八、九饼均可). 比如，手中牌如下图 1.

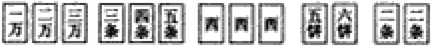


图 1

那么,它和的牌就是四、七饼,现在的问题是:如果全副牌中没有混儿,那么一手见万就和的牌,是什么?

齐先生当时讲:"这手牌已构造出来了,并且我猜想这是唯一的,但没证出来". 这手牌如图 2.

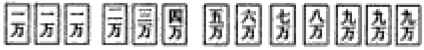


图 2

检验:若来一万,则为

一一一　一二三　四五六　七八九　九九

来二万,则为

一一一　二二　三四五　六七八　九九九

来三万,则为

一一　一二三　三四五　六七八　九九九

来四万,则为

一一一　二三四　四五六　七八九　九九

来五万,则为

一一一　二三四　五五　六七八　九九九

来六、七、八、九万,由对称性,可类似构造和牌. 可见,图 2 所示由 3 个一万,3 个九万和二 ~ 八万各一个,确实是解. 但是怎样证明这解的唯一性呢?

1998 年,有人告诉我"唯一性已证出,不久会在《数学通报》刊出". 可后来没有下文,看来是并未证出,这里的关键在于:如何把它化成一个数学问题.

[9] 杨世明. 转化与化归[M]. 郑州:大象出版社,2000.

whc 192. 符号三角问题[10]. 一个由"+""−"号构成的倒立三角形. 如图 3 由 14 个"+"和 14 个"−"构成:首行是按某一方式写的,下面一行则按乘法的符号法则写出,即两个同号下方写"+",异号下方写"−",这样一直下去:

+ + − + − + +

+ − − − − +

− + + + −

− + + −

− + −

− −

+

图 3

这三角形首行 7 个号,总共$\frac{1}{2}\times 7\times(7+1)=28$. 这里"+""−"号各一半.

试问:在一般情况下,对使$\frac{1}{2}n(n+1)$为偶数的 n(如 $n=3,4,7,8,11,12$,即 $n=4k-1,4k,k\in\mathbf{N}$),n 个符号按上述方法构成的,所含"+""−"号各半的三角形存在吗?何时存在?怎样构造(关键在于首行)?

例如:首行为 − + + − − + − − + + + − 即为 $n=12$ 时的解. 构造成三角形,去掉首行,即为 $n=11$ 的三角形. 而序列 + + + − − + − − − + + + + − − − − − + 有类似的性质.

[10] 史坦因豪斯. 100 个数学问题[M]. 陈经,译. 上海:上海教育出版社.

关于角平分线长平方和不等式的研究综述

孙文彩

（深圳市平冈中学，广东　深圳　518116）

摘　要：本文系统地总结了近十多年来对角平分线长平方和不等式的研究成果，给出了 $\sum w_a^2$ 的上下界估计式的强弱关系，以及没有解决的一些猜想.

关键词：角平分线长　平方和不等式　研究　综述

经过近十多年的探索与研究，我国数学研究工作者对三角形中的几何不等式进行了广泛深入的研究，取得了许多有价值的优美结果，本文拟对角平分线长平方和不等式的研究结果做一些简单的综述，以期减少重复研究，并使其有关研究更上一层楼，限于笔者的水平，再加上资料的欠缺与不完整，不可否认的会遗漏一些同仁十分有价值的结果，谨请指正！

本文约定：$a,b,c,s,R,r,\Delta,m_a,m_b,m_c,w_a,w_b,w_c,h_a,h_b,h_c,r_a,r_b,r_c$ 分别表示 $\triangle ABC$ 的三边长、半周长、外接圆半径、内切圆半径、面积、中线长、角平分线长、高线长和旁切圆的半径，$\sum$ 表示循环和，$\prod$ 表示连乘积，k_a,k_b,k_c 为 $\triangle ABC$ 的类似中线，F 是 $\triangle ABC$ 的 Fermat 点.

1. $f_1(s,R,r)\leqslant\sum w_a^2\leqslant f_2(s,R,r)$

F. Rgzkov, Z. A. Skopec （1963 年），L. Carlitz-S. philipp（1964 年）.，F. Leuenberger（1963 年）分别证明了

$$\sum w_a^2\leqslant s^2 \tag{1}$$

1966 年，U. O. Gonrdon 建立了内角平分线与面积之间的不等式

$$\sum w_a^2\geqslant 3\sqrt{3}\Delta \tag{2}$$

1993 年，王振与陈计建立了 $\sum w_a^2$ 与 s,R,r 的一个非常漂亮的关系式

$$s^2-4Rr+8r^2\leqslant\sum w_a^2\leqslant s^2-\frac{16}{9}r(R-2r) \tag{3}$$

1994 年，杨学枝得到了一个很更强的结果

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{4s^4}{3\sum a^2} \tag{4}$$

1995 年，刘健提出如下猜测

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{27}{2}Rr \tag{5}$$

1998 年，董玉栋证明了式(5)，式(5) 简洁但不是很强！

1997 年，杨学枝加强为

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{1}{9}(128Rr-13r^2) \tag{6}$$

式(6) 中的系数 $\frac{128}{9}$ 是最佳系数，不可改进.

1997 年，一名初三学生张杨将其推广为

$$\sum w_a^{2\alpha}\geqslant 3\left(\frac{9}{2}\right)^{\alpha}(Rr)^{\alpha}(\alpha\geqslant 1) \tag{7}$$

1997 年，刘保乾将式(5) 加强为

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{27Rr}{2}+\frac{5}{128}\sum(b-c)^2+\frac{5}{128}\sum\left(\frac{a}{b+c}\right)^2(b-c)^2 \tag{8}$$

此式等价于式(3) 右边不等式.

1999 年 1 月，刘保乾、杨学枝、张小明又证得如下隔离式

$$\sum w_a^2\geqslant 3\sum\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2\geqslant\frac{27}{2}Rr \tag{9}$$

刘保乾提出，张小明给出证明，杨学枝给出一个简证.

1999 年 2 月，刘保乾提出如下猜测

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{27Rr}{2}+\frac{13}{256}\sum(w_a-w_b)^2 \tag{10}$$

1999 年 4 月，褚小光给出式(10) 的证明，并得到如下隔离结果

$$\sum w_a^2\geqslant 3\sum\frac{a}{a+b+c}m_a^2\geqslant$$

$$\frac{3}{4}(s^2+2Rr+5r^2) \geqslant \frac{27}{2}Rr \qquad (11)$$

1998 年，吴跃生在研究式(5) 时意外地发现以下更精细的半对称不等式

$$w_a^2 \geqslant \frac{27Rr}{2}\left(\frac{s-a}{s}\right) \qquad (12)$$

1999 年，张才元、陶兴模又证明了如下结果

$$\frac{a^2}{w_b^2+w_c^2} \leqslant \frac{8s^2}{27bc} \qquad (13)$$

1999 年，刘保乾同样发现式(5) 的另一半对称不等式

$$w_a^2+w_b^2 \geqslant \frac{c}{2s}27Rr \qquad (14)$$

这些研究大大丰富了式(5) 的内涵！

1996 年，陈聪杰提出如下征解题

$$\frac{128Rr-13r^2}{9} \leqslant \sum w_a^2 \leqslant \frac{92R^2+13Rr+227r^2}{23} \qquad (15)$$

1996 年，黄西灵得到一个比式(6) 更强的结果

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{128}{9}Rr - \frac{20}{27}r^2 - \frac{38r^3}{27R} \qquad (16)$$

1999 年，褚小光证明了一个与式(16) 不相上下的结果

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{3}{4}s^2 + \frac{11}{5}Rr + \frac{47}{20}r^2 \qquad (17)$$

1999 年，宿晓阳提出猜测

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{3}{4}(s^2+2Rr+5r^2) \qquad (18)$$

式(18) 弱于式(17).

1999 年 2 月，尹华焱提出如下猜测

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{4s^2}{9}\left(2+\frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (19)$$

用 BOTTEST8 可以验证式(19) 与式(20) 不分强弱，与式(3)、(4)、(16)、(17) 也不分强弱.

2000 年 2 月，褚小光、杨学枝、尹华焱提出并证明了

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{s^4-2Rrs^2+3r^2s^2+2r^2(4R+r)^2}{s^2+2Rr+r^2} \qquad (20)$$

式(20) 等号在等腰三角形时成立，是一个很强的结果.

2000 年 6 月，周永良得到了一个关于 $\sum w_a^2$ 与 R，r 的估计式

$$\frac{128R^2-13r^2}{9} \leqslant \sum w_a^2 \leqslant 4R^2 + \frac{11-n^*}{2}Rr + n^* r^2 \qquad (21)$$

如果取 n^* 的最优近似分数：$9, \frac{67}{7}, \frac{227}{23}, \frac{533}{54}, \cdots$ 即可得到一组不等式链

$$\sum w_a^2 \leqslant \cdots \leqslant \frac{432R^2+61Rr+1\,066r^2}{108} \leqslant \frac{92R^2+13Rr+227r^2}{23} \qquad (22)$$

综合上面研究结果，我们得到如下强弱关系（并列结果为不相上下结果，下同）：

$$\left.\begin{array}{l} s^2-4Rr+5r^2 \\ \left.\begin{array}{l}\frac{27}{2}Rr \leqslant \frac{1}{9}(128Rr-13r^2) \leqslant \left\{\begin{array}{l}\frac{4s^4}{3\sum a^2} \\ \frac{128Rr}{9}-\frac{20r^2}{27}-\frac{38r^3}{27R}\end{array}\right. \\ \frac{3}{4}(s^2+2Rr+5r^2) \leqslant \frac{3}{4}s^2+\frac{11}{5}Rr+\frac{47}{20}r^2 \end{array}\right\} \leqslant \frac{s^4-2Rrs^2+3r^2s^2+2r^2(4R+r)^2}{s^2+2Rr+r^2} \\ \underset{\sim\sim\sim}{\frac{4s^2}{9}\left(2+\frac{r^2}{R^2}\right)} \end{array}\right\} \leqslant$$

$$\sum w_a^2 \left\{\begin{array}{l} \leqslant s^2-\frac{16}{9}r(R-2r) \\ \leqslant \frac{432R^2+61Rr+1066r^2}{108} \leqslant \frac{92R^2+13Rr+227r^2}{23} \leqslant \frac{28R^2+4Rr+6r^2}{7} \end{array}\right.$$

文中有下波线的结果仍为猜测，式(20) 强于式(3)、(4)、(16)、(17)，限于幅度，其证明从略，从上表中可看出式(19) 与式(20) 是目前为止最好的下界.

2. $\sum w_a^2$ 的其他估计式

1993 年，王振、陈计提出猜测

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{3}{4}\left(\sum AF\right)^2 \geqslant \sum r_a w_a \qquad (23)$$

褚小光、吴跃生分别给出了证明.

1994 年，刘健提出猜测

$$\sum w_a^2 \overset{(1)}{\geqslant} \frac{\sqrt{3}}{2}\sum a w_a \overset{(2)}{\geqslant} \sum w_b w_c \qquad (24)$$

孙文彩给出了式(24) 中(2) 的证明，刘健同时证明了式(24).

1994 年，刘健提出猜测

$$2\sum w_a^2 \geqslant \sqrt{3}\sum a m_a \qquad (25)$$

$$\sum \frac{1}{m_a^2}\sum w_a^2 \geqslant 9 \qquad (26)$$

褚小光证明了猜测(25)，陈胜利证明了(26).

1998 年,刘保乾提出猜测

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum h_a\right)\left(\sum m_a\right) \tag{27}$$

1999 年 2 月,褚小光、刘健共同证明了如下结果

$$\sum w_a^2 \geqslant \frac{1}{3}\sum h_a \sum r_a \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum h_a\right)\left(\sum m_a\right) \tag{28}$$

2000 年,刘健、褚小光建立了下列不等式链

$$\frac{1}{3}\sum m_a \sum r_a \overset{(1)}{\geqslant} \sum w_a^2 \overset{(2)}{\geqslant} \frac{1}{3}\sum h_a \sum r_a \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum w_a\right)^2 \geqslant \sum w_a r_a \geqslant \sum w_b w_c \tag{29}$$

证明式(29)中(1)、(2)的还有程篓驰、吴跃生.

1999 年 1 月,褚小光建立了如下不等式

$$\sum w_a^2 \geqslant \sum k_a^2 \quad (k_a\text{ 为三角形的类似中线}) \tag{30}$$

1999 年,西藏刘保乾提出猜测

$$\sum w_a^2 \geqslant \sum w_a k_a \geqslant \sum k_a^2 \tag{31}$$

1999 年 4 月,褚小光给出式(31)的证明.

2002 年,刘保乾提出

$$r\sum w_a^2 \geqslant \prod w_a \tag{32}$$

这个结果属于褚小光.

综合上面的研究,我们用 BOTTEST8 软件验算成立下述强弱关系

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\sum w_a w_b \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum a w_a \\ \frac{1}{3}\sum h_a \sum m_a\end{array}\right\} \leqslant \frac{1}{3}\sum h_a \sum r_a \\
\sum r_a w_a \leqslant \frac{3}{4}\sum (AF)^2 \\
\sum k_a^2 \leqslant \sum w_a k_a \\
\frac{\sqrt{3}}{2}\sum a m_a \\
\dfrac{9}{\sum \frac{1}{m_a^2}} \\
\dfrac{\prod w_a}{r}
\end{array}\right\} \leqslant$$

$$\sum w_a^2 \leqslant s^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum w_a \sum r_a \tag{33}$$

1994 年,杨学枝建立了如下不等式

$$\sum m_a^2 \sum w_a^2 \geqslant \left(\sum m_a w_a\right)^2 \tag{34}$$

1997 年 9 月,尹华焱提出如下猜想

$$\sum w_a^2 \cdot \sum m_a^2 \geqslant s^2 \sum m_b m_c \tag{35}$$

1998 年,褚小光证明了式(35),式(35)与式(4)不分强弱.

1999 年,杨学枝提出一个比式(35)更强的猜测

$$3\sum w_a^2 \cdot \sum m_a^2 \geqslant s^2\left(\sum m_a\right)^2 \tag{36}$$

褚小光给出了式(36)的证明.

2000 年,尹华焱提出了猜测

$$\left(\sum m_a\right)^2 \geqslant 3\sum w_a^2 \quad (\text{锐角三角形中}) \tag{37}$$

$$\left(\sum bc\right)\left(\sum m_a\right)^2 \geqslant \left(\sum w_a^2\right)\left(\sum a\right)^2 \quad (\text{锐角三角形中}) \tag{38}$$

褚小光分别证明了式(37)、(38).

综述上面研究结果,我们易证有下列强弱关系

$$\frac{s^2\sum m_b m_c}{\sum m_a^2} \leqslant \frac{4s^2\left(\sum m_a\right)^2}{9\sum a^2} \leqslant \sum w_a^2 \tag{39}$$

1998 年,刘健提出猜测

$$\sum w_a^2 > \frac{4}{5}\sum m_b m_c \tag{40}$$

1999 年,褚小光推广式(40)得到

$$5\sum w_a^2 \geqslant 4\sum m_b m_c + 27r^2 \tag{41}$$

2000 年,褚小光、杨学枝证明了

$$\sum m_a^2 + \sum w_a^2 \geqslant 2\sum m_b m_c \tag{42}$$

因为 $\sum m_b m_c \leqslant \frac{1}{4}(5s^2 - 20Rr + 13^2)$,式(42)弱于式(40).

1998 年 12 月,尹华焱提出猜测

$$8\sum m_b m_c + 3\sum w_a^2 \leqslant 13s^2 - 52Rr + 50r^2 \tag{43}$$

1999 年 3 月,尹华焱提出一个比(43)更强的猜测

$$4\sum m_a m_b + 2\sum w_a^2 \leqslant 7s^2 - 28Rr + 29r^2 \tag{44}$$

2000 年,杨学枝、尹华焱证明了

$$\sum\left(2m_a w_a + w_a^2\right) \leqslant 3s^2 \tag{45}$$

综述上面研究成果,我们易证有下述强弱关系(其中有下划线的仍为猜测)

$$2\sum m_b m_c - \sum m_a^2 \leqslant \frac{4}{5}\sum m_b m_c + \frac{27r^2}{5} \leqslant \sum w_a^2 \leqslant \begin{cases}\underline{\dfrac{7s^2 - 28Rr + 29r^2 - 4\sum m_b m_c}{2}} \\ 3s^2 - 2\sum m_a w_a\end{cases} \tag{46}$$

式中有下波线的结果仍为猜测.

1998 年 5 月,尹华焱证明了下列对称式

$$\frac{\sum w_a^2}{\sum w_b w_c} + \frac{\sum w_b w_c}{\sum w_a^2} \le \frac{R}{r} \qquad (47)$$

1998 年,刘保乾猜测

$$\sum w_a^2 \ge 3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 \qquad (48)$$

1999 年,褚小光证明了式(48) 与式(18) 等价,并加强为

$$\sum w_a^2 \ge 3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{1}{2}Rr - r^2 \qquad (49)$$

并提出如下猜测

$$\sum w_a^2 \ge 3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{13}{18}Rr - \frac{13}{9}r^2 \qquad (50)$$

1999 年 3 月,褚小光又证明了

$$2\sum w_a^2 + \sum w_b w_c \le 9\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 \qquad (51)$$

1999 年 8 月,黄拔萃证明了一个比式(49) 更强的结论

$$\sum w_a^2 \ge 3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{3}{4}Rr - \frac{3}{2}r^2 \qquad (52)$$

式(52) 是一个很强的结论,与式(20) 不相上下.

综上所述,我们易证下列强弱关系

$$3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 \le$$

$$3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{1}{2}Rr - r^2 \le$$

$$3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{13Rr}{18} - \frac{13}{9}r^2 \le$$

$$3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{3}{4}Rr - \frac{3}{2}r^2 \le$$

$$\sum w_a^2 \le \frac{9}{2}\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 - \frac{1}{2}\sum w_a w_b \qquad (53)$$

综述上面(33)、(39)、(46)、(53) 的结果,我们用 BOTTEST 软件验证有下列强弱关系成立

$$\sum w_a^2 \le \begin{cases} \frac{7s^2 - 28Rr + 29r^2 - 4\sum m_b m_c}{2} \\ 3s^2 - 2\sum m_a w_a \\ s^2 - \frac{16}{9}r(R-2r) \le s^2 \le \frac{1}{3}\sum m_a \sum r_a \le \\ \frac{432R^2 + 61Rr + 1\,066r^2}{108} \end{cases}$$

(第一项下有波线)

式中有下波线的结果仍为猜测.

$$\sum w_a^2 \ge \begin{cases} \frac{s^4 - 2Rrs^2 + 3r^2s^2 + 2r^2(4R+r)^2}{s^2 + 2Rr + r^2} \ge \begin{cases} \frac{4s^2(\sum m_a)^2}{9\sum a^2} \\ \frac{1}{3}\sum h_a \sum r_a \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sum a m_a \\ \frac{3}{4}\sum (AF)^2 \\ \frac{9}{\sum \frac{1}{m_a^2}} \\ \sum w_a h_a \\ \frac{\prod w_a}{r} \end{cases} \\ 3\sum \frac{a}{a+b+c} m_a^2 + \frac{3}{4}Rr - \frac{3}{2}r^2 \end{cases} \qquad (54)$$

3. 未解决的问题

1997 年,尹华焱提出猜测

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}\sum a^3 \overset{(1)}{\ge} \frac{3}{8}(\sum a^2)^{\frac{3}{2}} \overset{(2)}{\ge}$$

$$\sum w_a^3 \overset{(3)}{\ge} \frac{\sqrt{3}(\sum a^2)^3}{8\sum a^3} \overset{(4)}{\ge} \frac{9\sqrt{3}}{8}abc \qquad (55)$$

1997 年,尹华焱提出(2),2000 年 3 月提出(3),刘保乾提出(1)、(4).

1999 年,刘保乾提出如下猜测

$$\sum w_a^t \ge \frac{(\sum m_a^t)3abc}{\sum a^3} \quad (0 \le t \le 4) \qquad (56)$$

$$\sum w_a^t \le \frac{(\sum m_a^t)(\sum a^3)}{3abc} \quad (-1 \le t \le 0) \qquad (57)$$

1999 年 4 月,刘保乾提出如下猜测

$$\frac{1}{9}(\sum m_a)^3 \le \sum w_a^3 \qquad (58)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}s^3 + \frac{16 - 9\sqrt{3}}{(3\sqrt{3}-4)^3}(\sqrt{3}s - \sum w_a)^3 \le \sum w_a^3 \qquad (59)$$

$$8 + (\frac{R}{2r})^8 \ge \sum w_a^2 \sum \frac{1}{w_a^2} \ge 10 - (\frac{2r}{R})^8 \qquad (60)$$

$$\sum w_a^2 \sum \frac{1}{m_a^2} \ge 10 - (\frac{2r}{R})^2 \qquad (61)$$

$$\sum w_a^2 \ge \frac{1}{3}(\sum k_a)^t (\sum m_a)^{(2-t)}$$

(试确定最小的 t) (62)

$$\sum w_a^2 \ge \frac{1}{3}(\sum h_a)^t (\sum m_a)^{(2-t)}$$

（试确定最小的 t） (63)

$$2\sum w_a^2+13\sum w_bw_c\geqslant 15\sum r_ah_a \quad (64)$$

$$41\sum w_a^2+75\sum r_ah_a\geqslant 116\sum w_bw_c \quad (65)$$

$$\frac{1}{32}\sum w_a^2\left[5\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+22\right]\geqslant$$

$$\sum m_a^2\geqslant\frac{1}{17}\sum w_a^2\left[2\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)+13\right] \quad (66)$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum a^3-3abc\right)\geqslant\sum w_a^3-\frac{9\sqrt{3}}{8}abc\geqslant$$

$$\frac{21}{100}\left(\sum a^3-3abc\right) \quad (67)$$

1999 年 5 月，刘保乾又提出如下猜测

$$\sum w_a^3\geqslant\left(\frac{83}{200}+\frac{117r}{100R}\right)\sum m_a^3 \quad (68)$$

$$\sum w_a^4\geqslant\left(\frac{11}{50}+\frac{39r}{25R}\right)\sum m_a^4 \quad (69)$$

1999 年，刘保乾提出猜测

$$\frac{9}{2}\geqslant\sum w_a^2\sum\frac{1}{m_b^2+m_c^2}\geqslant 3\sum\cos A \quad (70)$$

2000 年，尹华焱提出猜测

$$\sum(w_b+w_c)w_a^2\geqslant$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{8}\left[\prod a+\prod(b+c-a)\right] \quad (71)$$

$$\sum(w_a^2+r_am_a)\leqslant 2\sum m_bm_c$$

（锐角三角形中） (72)

$$\sqrt{3}\sum a\sum m_bm_c\geqslant 2\sum m_a\sum w_a^2$$

（锐角三角形中） (73)

$$\left(\sum m_a\right)\left(\sum w_a^2\right)\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{8}abc$$

（锐角三角形中） (74)

$$\left(\sum w_a^2\right)\left(\sum m_ah_a\right)\geqslant s^2\left(\sum h_a^2\right) \quad (75)$$

$$12\sum m_aw_a+5\sum w_a^2\leqslant 17s^2 \quad (76)$$

2000 年，刘保乾提出猜测

$$\sum(w_b-w_c)^2\geqslant\frac{4}{5}\sum(h_b-h_c)^2 \quad (77)$$

$$\frac{R}{2r}\sum w_bw_c\geqslant$$

$$\sum w_a^2+\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\sum(w_b-w_c)^2 \quad (78)$$

2000 年 8 月，褚小光提出如下猜测

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{3}{4}\sum bc-kr(R-2r) \quad (79)$$

k 是方程 $8x^3-76x^2+54x+1=0$ 的一个根，$k=0.793\ 367\ 127\cdots$

2005 年 4 月，褚小光提出猜测

$$\sum w_a^2\geqslant r_1^2+r_2^2+r_3^2+8(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3) \quad (80)$$

参考文献

[1] BOTTEMA O，等. 几何不等式[M]. 单墫，译. 北京：北京大学出版社，1990.

[2] 王振，陈计. 三角形角平分线的平方和[J]. 教学研究，1993(1).

[3] 杨学枝. 关于三角形角平分线的两个不等式[J]. 中学数学，1994(7).

[4] 刘建. 几何不等式在中国[M]. 南京：江苏教育出版社，1996.

[5] 董玉栋. 一个几何不等式猜想的肯定[J]. 中学数学月刊，1998(1).

[6] 杨学枝. 关于《100 个待解决的三角形不等式问题》的研究进展情况[J]. 不等式研究通讯，1997(5).

[7] 张杨. 一个角平分线不等式的推广[J]. 中学数学教学，1997(4).

[8] 张小明. cxx-223[J]. 不等式研究通讯，1999(2)：74.

[9] 刘保乾. cwd-83，cwx-135 解答[J]. 不等式研究通讯，1999(1)：87.

[10] 褚小光. cwd-90，文[1]中若干问题的解决[J]. 不等式研究通讯，1999(2)：83.

[11] 吴跃生. shc22 和 shc60 的统一加强[J]. 中学数学，1998(1).

[12] 张才元，陶兴模. 一个猜想的否定[J]. 不等式研究通讯，1999(3)：34.

[13] 陈聪杰. 问题征解 155[J]. 数学通迅，1996(1).

[14] 黄西灵. cxx-17[J]. 研究通讯，1997(1)：30.

[15] 宿晓阳. 若干猜测不等式的证明[J]. 不等式研究通讯，1999(1)：30.

[16] 尹华焱. cwx-219[J]. 不等式研究通讯，1999(2)：78.

[17] 褚小光，杨学枝，尹华焱. cxx-277[J]. 不等式研究通讯，2000(2)：42.

[18] 褚小光. 涉及 Fermat 点的一个猜想不等式[J]. 不等式研究通讯，1999(1)：41.

[19] 吴跃生. 关于 Fermat 点的一个猜想不等式[J]. 数学通讯，1998(1).

[20] 孙文彩. 关于三角形内角平分线的一个不等式[J]. 湖南数学通讯,1996(1).
[21] 褚小光. CIQ-145[J]. 不等式研究通讯,2005(1):94.
[22] 杨学枝. 不等式研究[M]. 拉萨:西藏人民出版社,2000.
[23] 陈胜利. 关于三角形角平分线,中线与边长的几个不等式[C]// 全国第三届初等数学研究学术交流会. 福州:1996.
[24] 刘保乾. 若干三角形几何不等式问题[J]. 不等式研究通讯,1998(6).
[25] 褚小光. cwd-87 文[1]中若干问题解答[J]. 不等式研究通讯,1999(2):80.
[26] 褚小光. cwd-110[J]. 不等式研究通迅,1999(2):93.
[27] 刘保乾. 若干三角形几何不等式问题(续)[J]. 不等式研究通迅,1999(1):65-73.
[28] 褚小光. 关于角平分线与类似中线的一个不等式链[J]. 不等式研究通讯,1999(3):42.
[29] 刘保乾. BOTTEMA 我们看见了什么 —— 三角形几何不等式研究的新理论新方法和新结果[M]. 拉萨:西藏人民出版社,2003.
[30] 褚小光. 关于三角形角平分线的几个不等式[J]. 不等式研究通讯,2008(4).
[31] 杨学枝. cxx-2[J]. 研究通讯,1994(3):10.
[32] 尹华焱. 问题与猜想 cwx-107[J]. 研究通讯,1997(6):21.
[33] 褚小光. 三角形中线与角平分线的两个不等式[J]. 研究通讯,1998(6):17.
[34] 褚小光. 中线与角平分线的若干不等式[J]. 不等式研究通迅,1999(1):75.
[35] 褚小光. 一个三角形猜想不等式的证明[J]. 不等式研究通讯,1999(2):33.
[36] 尹华焱. 关于 $\sum m_b m_c$ 的若干上界的强弱比较[J]. 不等式研究通讯,1999(1):37.
[37] 尹华焱. cxx-218[J]. 不等式研究通讯,1999(2):73.
[38] 杨学枝. 不等式研究成果集锦(5)[J]. 中学数学,2000(6).
[39] 刘保乾. 再谈型如 $x\varphi_1+y\varphi_2+z\varphi_3\geq(\leq)x+y+z$ 的不等式[J]. 研究通迅,1998,5(18).
[40] 褚小光. cxx-214[J]. 不等式研究通迅,1999,2(21):71.
[41] 黄拔萃. 答二题,cxx-214[J]. 不等式研究通迅,2000(1):5.
[42] 尹华焱. cwx-44(5)[J]. 不等式研究通讯,1997(9):5.
[43] 尹华焱. cwx-314(1)[J]. 不等式研究通讯,2000(2):43.
[44] 刘保乾. 182 个三角形几何不等式问题[J]. 不等式研究通讯,1999(2):49.
[45] 刘保乾. cwx-232[J]. 不等式研究通讯,1999(3):64.
[46] 刘保乾. cwx-259(10)[J]. 不等式研究通讯,1999(4):46.
[47] 褚小光. cwx-334[J]. 不等式研究通迅,2000(5-6):81.

作者简介

孙文彩,男,1964 年出生,中学数学高级教师,全国初等数学研究会副秘书长兼常务理事,中国高等教育学会教育数学专业委员会理事,《初等数学研究》杂志社编委,中国不等式研究小组成员,中国科学技术协会会员,市区"优秀教师","优秀班主任";1995 年、1999 年、2002 年分别担任县、市级教育科研课题主持人,1996 年、2000 年、2003 年、2006 年分别应邀参加全国初等数学研究学术交流会,2003 年获全国"青年初等数学研究奖"提名奖。主要研究方向为数学教育教学与思维方法、不等式、凸函数、单形空间等;目前在国内外刊物上发表研究论文 60 多篇。

100 个优美的三角形几何不等式新问题

刘保乾

(西藏自治区人事厅信息中心,西藏　拉萨　850000)

摘　要:提出了 100 个三角形几何不等式新问题.

关键词:三角形　不等式　问题

在三角形几何不等式研究中,人们普遍关注完全对称不等式,对二元对称和轮换对称不等式研究较少.针对这种情况,文[1]笔者较系统地研究了二元对称不等式和轮换对称不等式,并探讨了这类不等式的发现规律.本文收集了笔者提出的 100 个三角形几何不等式新问题,供读者探讨.本文中的不等式用杨路教授研发的 Bottema 软件(参阅文[2])验证成立.

以下约定:ΔABC 的三边为 a,b,c,面积为 Δ,半周为 s,内切圆和外接圆半径分别为 r,R,傍切圆半径为 r_a,r_b,r_c,高、角平分线、中线和类似中线分别为 $h_a,h_b,h_c,w_a,w_b,w_c,m_a,m_b,m_c$ 和 k_a,k_b,k_c. x,y,z,u,v,w 表示正数,$\sum_3 a$ 表示三元循环求和,$\prod_3 a$ 表示三元循环求积,$\{\Delta_a\}$ 表示在锐角三角形中成立.

l_1 · $\dfrac{(w_a+r)^2 w_a}{(w_b+w_c)^2(w_a-r)^2} \geqslant \dfrac{16r}{(a+b)(a+c)}$

l_2 · $m_b+m_c \geqslant h_b+h_c+\dfrac{1}{2}\dfrac{(b+c-2a)^2}{b+c}$

l_3 · $\dfrac{(3r_a+w_a)^2}{r_a+w_a} \geqslant \dfrac{4(s-b)(s-c)(a+b)(a+c)}{a(b+c)r}$

l_4 · $(w_b+w_c)(w_a-r)^2(r_a+w_a) \geqslant rw_a(b+c)^2$

l_5 · $\left(\dfrac{m_b m_c}{\Delta}\right)^3 \geqslant 3\sqrt{3}\,\dfrac{a^2}{bc}$

l_6 · $w_b+w_c \geqslant \dfrac{16sar}{(a+b)(a+c)}$

l_7 · $\dfrac{m_b+m_c-m_a}{m_b+m_c+m_a} \geqslant \dfrac{4}{9}\sin^2 A$

l_8 · $\dfrac{w_b w_c}{(w_a-r)^2} \geqslant \dfrac{27}{16}\dfrac{(b+c)^2}{bc}\tan^2\dfrac{A}{2}$

l_9 · $\cos^2\dfrac{A}{2} \geqslant \dfrac{27}{4}\dfrac{w_b w_c}{(2r_a+w_a)^2}$

l_{10} · $\dfrac{729}{4\,096}a^3b^3c^3 \geqslant w_a^6 w_b^3 w_c^3$

l_{11} · $\dfrac{w_a}{w_a+w_b+w_c} \geqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\dfrac{r}{a}$

l_{12} · $\left(\dfrac{b}{w_c}+\dfrac{c}{w_b}\right)^2 \geqslant \dfrac{4(r_a+w_a)^2}{r_a(2r_a+w_a)}$

l_{13} · $\sin\dfrac{A}{2} \geqslant \dfrac{r(2r_a+w_a)}{w_a(r_a+w_a)}$

l_{14} · $\dfrac{1}{2}\dfrac{(r_a+w_a)(b+c)}{w_a r_a} \geqslant \dfrac{b}{w_c}+\dfrac{c}{w_b}$

l_{15} · $\dfrac{(r_a+w_a)^2}{2r_a+w_a} \geqslant \dfrac{(w_a-r)^2}{w_a-2r}$

l_{16} · $w_b w_c(r_a+w_a)^2 \geqslant \dfrac{27}{4}b^2c^2\tan^2\dfrac{A}{2}$

l_{17} · $\dfrac{w_b^t}{r_c^t}+\dfrac{w_c^t}{r_b^t} \geqslant \dfrac{4r_a^t}{r_a^t+w_a^t}, t=-1,\pm 2$

l_{18} · $(w_b+r_b)(w_c+r_c) \geqslant (w_c+w_a)(w_a+w_b)$

l_{19} · $\dfrac{(w_b+w_c)^2}{2as} \leqslant \dfrac{w_a(r_a+w_a)}{(2r_a+w_a)(w_a-r)} \leqslant 1$

l_{20} · $\dfrac{1}{8}\dfrac{w_b w_c}{w_a(s-b)(s-c)} \geqslant \dfrac{w_a-r}{(r+w_a)^2}$

l_{21} · $\dfrac{(b+c-a)^2}{bc}+\dfrac{(m_b+m_c-m_a)^2}{m_b m_c} \geqslant 2$

l_{22} · $(m_b+m_c)(m_a-r) \geqslant a(b+c-a)$

l_{23} · $\sqrt{w_b w_c}\left(\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{w_a}\right) \geqslant 2$

l_{24} · $(w_b+w_c)^2(r_a+w_a) \geqslant \dfrac{8bcw_b^2w_c^2}{\Delta(b+c)}$

l_{25} · $\dfrac{4m_a}{(b+c)^2} \geqslant \dfrac{1}{r_a+m_a}+\dfrac{r}{bc}$

l_{26} · $w_b w_c+2w_a^2 \leqslant \dfrac{9}{4}(w_a-r)(r_a+w_a)$

$l_{27}\cdot m_a(r_a+m_a)^2\geqslant\frac{1}{4}(2r_a+m_a)(b+c)^2$

$l_{28}\cdot(w_b+w_c)^2\leqslant\frac{3}{2}\frac{a}{s}\sum bc$

$l_{29}\cdot w_bw_c\geqslant\frac{27}{4}\frac{bc(s-b)(s-c)}{s^2}$

$l_{30}\cdot m_b+m_c-m_a\geqslant\frac{2\Delta}{w_a}\sin A$

$l_{31}\cdot\frac{r_a+w_a}{(r+w_a)^2w_bw_c}\geqslant\frac{1}{4}\frac{1}{r(s-a)a}$

$l_{32}\cdot\left(2+\frac{w_a}{r_a}\right)^2\geqslant 27\frac{w_a^2}{w_bw_c}$

$l_{33}\cdot\frac{bc}{r(b+c)^2}\geqslant\frac{m_a}{(m_a-r)(r_a+m_a)}$

$l_{34}\cdot\frac{8}{9}\left(\frac{s-a}{s}\right)\sum\frac{w_bw_c}{w_a}\geqslant\frac{(w_a+r)^2}{r_a+w_a}$

$l_{35}\cdot\left(\frac{2}{w_a^t}+\frac{1}{r_a^t}\right)\sum w_a^t\geqslant 9,t=\pm 1$

$l_{36}\cdot\frac{m_a}{m_a+m_b+m_c}\geqslant\frac{16}{9}\frac{s(s-a)}{(b+c)^2}$

$l_{37}\cdot w_a-r\geqslant\frac{3w_a^2(r_a+w_a)}{(r_a+2w_a)^2}$

$l_{38}\cdot(w_a-r)(r_a+w_a)\geqslant 4\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2$

$l_{39}\cdot\frac{a}{kb+c}+\frac{m_a}{km_b+m_c}\geqslant\frac{2}{1+k},2\geqslant k\geqslant\frac{1}{2}$

$l_{40}\cdot(w_b+w_c)^2(w_a+2r_a)^2\geqslant 27bcr_a^2$

$l_{41}\cdot w_a(w_b+w_c)\leqslant bc\left(1+\frac{a}{b+c}\right)$

$l_{42}\cdot\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(r_a+w_a)\geqslant\sqrt{3}+3\tan\frac{A}{2}$

$l_{43}\cdot\frac{w_bw_c}{bc}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{12}\frac{w_a+w_b+w_c}{s-a}$

$l_{44}\cdot\frac{w_a(r_a+w_a)}{\cos\frac{A}{2}}\geqslant\frac{8(b+c)^2(s-b)(s-c)abc}{(a+b)^2(a+c)^2r}$

$l_{45}\cdot bc\geqslant\frac{4rw_a(w_b+w_c)^2}{(r_a+w_a)^2}$

$l_{46}\cdot\frac{8a^2bc(s-a)}{s(w_a^2-r^2)}\geqslant\frac{(w_a+r)(w_b+w_c)^2}{w_a}$

$l_{47}\cdot\frac{(3r_a+w_a)^2}{(w_a+r)^2(2r_a+w_a)^2}\geqslant\frac{1}{4}\frac{(b+c)^2}{s(s-a)bc}$

$l_{48}\cdot\frac{8a^2(b+c)w_a^2}{b+c+a}\geqslant(w_c+w_b)^2(r+w_a)^2$

$l_{49}\cdot(w_a-r)(r_a+w_a)\geqslant r^2\left(\frac{w_b}{s-b}+\frac{w_c}{s-c}\right)^2$

$l_{50}\cdot m_a+m_b+m_c\geqslant\frac{3}{2}h_a+\frac{3\sqrt{3}}{4}a$

$l_{51}\cdot(w_a-r)(r_a+w_a)(2r_a+w_a)\geqslant 4w_aw_bw_c$

$l_{52}\cdot(w_b+w_c)^2(r_a+w_a)^2\geqslant 16s(s-a)r_a^2$

$l_{53}\cdot\sqrt{\frac{w_bw_c}{bc}}\leqslant\frac{3}{4}\frac{a}{s^2}\sum\frac{w_bw_c}{w_a}$

$l_{54}\cdot(w_a-r)(r_a+w_a)\geqslant 4\left(r+\frac{bc}{r_a+h_a}\right)$

$l_{55}\cdot\left(\frac{b+c}{r_a+m_a}\right)^2\geqslant 4\left(\frac{-a+b+c}{a+b+c}\right)$

$l_{56}\cdot(2r_a+w_a)(w_b+w_c)^2\geqslant\frac{27}{2}\frac{abcr}{s-a}$

$l_{57}\cdot r+\frac{a(s-a)^2}{r(b+c)}\left(\frac{r}{s-a}+\frac{s-a}{w_a}\right)^2\geqslant w_a$

$l_{58}\cdot\frac{w_bw_c}{2r_a+w_a}\geqslant\frac{2(b+c)ar}{(a+c)(b+a)}$

$l_{59}\cdot\frac{(3r_a+w_a)^2}{r_a+w_a}\geqslant\frac{8(s-b)(s-c)w_as}{(s-a)w_bw_c}$

$l_{60}\cdot w_bw_c\leqslant(s-b)(s-c)+\frac{abc}{b+c}$

$l_{61}\cdot m_bm_c\geqslant\frac{4s^2(s-b)(s-c)}{9bc-8w_a^2}$

$l_{62}\cdot\frac{R}{2r}\geqslant\frac{3}{4}\frac{aR\sum a^2}{\Delta(b^2-bc+c^2+2a^2)}\geqslant\frac{m_a}{h_a}$

$l_{63}\cdot a^2\geqslant\frac{1}{4}\frac{(w_c+w_b)^2(c+a)(a+b)}{(b+c)s}\geqslant$
$4(s-b)(s-c)$

$l_{64}\cdot r+\frac{bc}{h_b+h_c}\geqslant k_a\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(s-a)+\frac{9}{2}\frac{r^2(4R+r)}{s^2}$

$l_{65}\cdot w_aw_b\cos\frac{C}{2}+w_aw_c\cos\frac{B}{2}\geqslant$
$w_bw_c\cos\frac{A}{2}+h_a^2\sin A$

$l_{66}\cdot(w_a-r)(r_b+w_b)(r_c+w_c)\geqslant$
$\frac{8}{9}s(s-a)\sum w_a$

$l_{67}\cdot\frac{4R+r}{s}\geqslant\frac{b+c}{m_a}-\frac{2r}{b+c}\left(1+\frac{r_a}{m_a}\right)\geqslant\sqrt{3}$

$l_{68}\cdot b+c\geqslant 2\cos\frac{A}{2}\frac{(r_a+w_a)^2}{(2r_a+w_a)}\geqslant\frac{4bc}{b+c}$

$l_{69}\cdot(b+c)(m_b+m_c)\geqslant$
$4(b+c-a)(m_b+m_c-m_a)$

$I_{70}\cdot\sum_{3}\cos\frac{A}{2}\geqslant\frac{\sin A}{1+\sin\frac{A}{2}}\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)}\geqslant$

$$\sum_{3}\sin A$$

$I_{71}\cdot\frac{(l_a+r_a)^2}{l_a}\geqslant\frac{2(s-b)(s-c)(a+b)(a+c)}{r(b+c)a}$,

$l_a=w_a,m_a,k_a$

$I_{72}\cdot\frac{(3r_a+l_a)^2}{r_a+l_a}\geqslant\frac{2h_a(a+b)(c+a)}{(s-a)(b+c)}$,

$l_a=m_a,w_a,k_a$

$I_{73}\cdot\frac{(2r_a+l_a)(l_a+r)^2}{(3r_a+l_a)^2l_a}\geqslant\frac{-a+b+c}{a+b+c}$,

$l_a=m_a,w_a$

$I_{74}\cdot\frac{(w_a-r)(2r_a+w_a)^4}{(r_a+w_a)^3w_bw_c}\geqslant\frac{27}{4}$

$I_{75}\cdot\frac{(2e_a+1)^2}{e_a}\geqslant\frac{4(c+a)(a+b)}{a(b+c)}$,

$e_a=\sin\frac{A}{2},\frac{a}{b+c},\frac{r_a}{r_a+w_a},\frac{r_a}{r_a+m_a},\frac{r}{w_a-r}$

$I_{76}\cdot\frac{1}{2}\frac{b+c}{l_a}\geqslant\frac{s-b}{l_b}+\frac{s-c}{l_c}$,

$(l_a,l_b,l_c)=(m_a,m_b,m_c),(w_a,w_b,w_c)$

$I_{77}\cdot\left(\frac{m_b}{s-b}+\frac{m_c}{s-c}\right)^2\geqslant8+\frac{4m_a}{r_a}\cot\frac{A}{2}$

$I_{78}\cdot\frac{m_a^2m_bm_c}{m_b+m_c}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}(s-a)(s-b)(s-c)\frac{b+c}{a}$

$I_{79}\cdot(1-\frac{r}{b})+(1-\frac{r}{c})\geqslant(1-\frac{r}{a})+$

$$\frac{1}{9}\frac{1}{R}|s-18r|$$

$I_{80}\cdot(\frac{a}{a+b+c})^t+(\frac{m_a}{m_a+m_b+m_c})^t\geqslant$

$\frac{2}{3^t}(t\geqslant\frac{\ln 2}{\ln 3-\ln 2})$

$I_{81}\cdot\frac{(w_a+r)^2}{w_bw_c}(\frac{2r_a+w_a}{r_a+w_a})\geqslant$

$\frac{16(b+c)(s-a)a}{(a+c)(b+a)s}$

$I_{82}\cdot(m_a+m_b-2m_c)(2c-a-b)+$

$(m_b+m_c-2m_a)(2a-b-c)\geqslant0$

$I_{83}\cdot\frac{2a^2s^3(b+c)^2}{(s-a)(c+a)^2(a+b)^2}\geqslant$

$\frac{(w_c+w_b)^2(r_a+w_a)w_a}{(r+w_a)^2}$

$I_{84}\cdot(w_a+r)^2(r_a+w_a)(w_b+w_c)^2\geqslant$

$32w_a(s-b)(s-c)bc$

$I_{85}\cdot a^2\geqslant\frac{1}{2}\frac{w_bw_c(3r_a+w_a)^2}{(r_a+w_a)(2r_a+w_a)}$

$I_{86}\cdot(b+a)(c+a)bc\geqslant$

$(r_a+w_a)^2(w_a+r)^2\geqslant$

$\frac{16(s-b)^2(s-c)^2(b+a)(c+a)bc}{a^4}$

$I_{87}\cdot(w_a+r)^2(1-\frac{r}{w_a})(2r_a+w_a)\geqslant$

$\frac{32r(b+c)^2a^2bc}{(a+b)^2(a+c)^2}$

$I_{88}\cdot u^2+v^2+w^2\geqslant$

$2\left[vw(1-\frac{x}{y+z})+wu(1-\frac{y}{z+x})+\right.$

$\left.uv(1-\frac{z}{x+y})\right]$

$I_{89}\cdot u^2+v^2+w^2\geqslant$

$\frac{1}{3}[(v+w)\cos A+(w+u)\cos B+$

$(u+v)\cos C](u+v+w)$

$I_{90}\cdot u^2+v^2+w^2\geqslant$

$2\sum_{3}vw\cos A(\cos B+\cos C)$

$I_{91}\cdot(x+y)(z+x)u^3+(y+z)(x+y)v^3+$

$(z+x)(y+z)w^3\geqslant$

$\frac{4}{9}(xy+yz+zx)(u+v+w)(u^2+v^2+w^2)$

$I_{92}\cdot(uv+wu+vw)\cdot$

$(u^{-2}\cot\frac{A}{2}+v^{-2}\cot\frac{B}{2}+w^{-2}\cot\frac{C}{2})\geqslant$

$9(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})\ \{\Delta_a\}$

$I_{93}\cdot v^2(b+c)^2+w^2(c+a)^2+u^2(a+b)^2\geqslant$

$\frac{32\sqrt{3}}{3}(vw\cos C+wu\cos A+uv\cos B)\Delta$

$I_{94}\cdot(u^2+v^2+w^2)(u+v+w)\geqslant$

$2[u(1-\frac{x}{y+z})+v(1-\frac{y}{z+x})+$

$w(1-\frac{z}{x+y})](uv+uw+vw)$

$I_{95}\cdot(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2})^2(u^2+v^2+w^2)\geqslant$

$12(u\sin A\cos A+v\sin B\cos B+w\sin C\cos C)^2\cdot$

$l_{96}\cdot u^2+v^2+w^2 \geqslant$

$$\frac{4\sqrt{3}}{27}(u\sin 2A+v\sin 2B+w\sin 2C)^2\cdot\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)$$

$l_{97}\cdot u^2+v^2+w^2 \geqslant$

$$3\left(vw\frac{\cos A}{\cos A+1}+wu\frac{\cos B}{\cos B+1}+uv\frac{\cos C}{\cos C+1}\right)$$

$l_{98}\cdot 3\left(vw\frac{\cos A}{\cos A+1}+\right.$

$$\left.wu\frac{\cos B}{\cos B+1}+uv\frac{\cos C}{\cos C+1}\right)\geqslant$$

$$uv\cos C+vw\cos A+wu\cos B\ \{\Delta_a\}$$

$l_{99}\cdot [(y+z)u+(z+x)v+(x+y)w]^3 \geqslant$

$$24xyz(u+v+w)(uv+vw+uw)$$

$l_{100}\cdot (x^3+y^3+z^3)^2(u^3+v^3+w^3)^2-$

$$6(x^2u+y^2v+z^2w)(xu^2+yv^2+zw^2)(x^3+y^3+z^3)\cdot(u^3+v^3+w^3)-$$

$$3(x^2u+y^2v+z^2w)^2(xu^2+yv^2+zw^2)^2+$$

$$4(xu^2+yv^2+zw^2)^3(x^3+y^3+z^3)+$$

$$4(x^2u+y^2v+z^2w)^3(u^3+v^3+w^3)\geqslant 0$$

参考文献

[1] 刘保乾. Bottema,我们看见了什么——三角形几何不等式研究的新理论、新方法和新结果[M]. 拉萨:西藏人民出版社,2003.

[2] L YANG. Practical automated reasoning on inequalities: Generic programs for inequality proving and discovering[J]. In: Proc. of The Third Asian Technology Conference in Mathematics, Springer - Verlag, 1998:24-35.

作者简介

刘保乾，男，1962年3月出生，中共党员，陕西省凤翔县人，现在西藏自治区党委组织部工作。主要研究方向是几何不等式和多项式不等式。公开发表不等式论文30余篇，出版专著1部。曾为中国不等式研究小组内刊《不等式研究通讯》的发展和网站的创建做出过艰苦而富有成效的工作；1998年提出的量级理论为不等式研究开创了新的视角；先后提出了许多有一定价值的三角形几何不等式问题和多项式不等式问题；跳出传统的"指数组"方法，提出"逐步待定系数"算法，解决了齐次对称多项式表示为初等对称式问题，并已用程序实现，基于此算法的多项式线性无关检验程序，成为多项式线性空间维数研究的重要工具；推导了一些多项式线性空间维数计算公式；首先将增量代换方法引入到多项式的机器证明研究中，提出了第二类差分代换方法并已编程实现；提出了类多项式并发现了构造规律；提出的生成运算，为揭示多项式的一些性质和发现新不等式提供了便利；提出的模型方法和调整思想成为发现和研究不等式十分重要的手段和基础；在中国不等式研究小组网站上发表了大量的实时互动贴，其中提出的问题和研究素材对多项式不等式研究产生了一定的影响。

数海拾贝译文三则*

周春荔

(首都师范大学数学科学学院,北京　100048)

1. 三次方程与几何的联系

对于任意三角形,不难证明关系式 $p-a=r\cot\frac{A}{2}$,其中 p 是半周长,r 是内切圆的半径. 实际上,设 $u=AC_1=AB_1$,$v=BC_1=BA_1$,$w=CA_1=CB_1$(图1). 则 $u+v=c$,$v+w=a$,$w+u=b$,所以 $u=\frac{b+c-a}{2}=p-a$. 注意 $AB_1=r\cot\frac{A}{2}$.

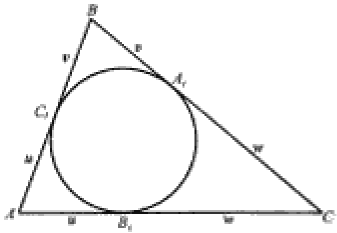


图1

利用正弦定理且以 $2R\sin A$ 代换 a,其中 R 是外接圆的半径. 结果我们得到

$$p=2R\sin A+r\cot\frac{A}{2}$$

我们考查三角形带有某些值 p,R 和 r 的方程

$$p=2R\sin\varphi+r\cot\frac{\varphi}{2} \qquad (1)$$

这个方程具有根 $\varphi_1=A$,$\varphi_2=B$,$\varphi_3=C$——三角形角的量. 可以希望,方程(1)在怎样的意义下是一个三次方程.

在方程(1)中包含 $\sin\varphi$ 和 $\cot\frac{\varphi}{2}$. 它们能够通过某一种三角函数来表示. 例如

$$\sin\varphi=\frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\cot\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\tan\frac{\varphi}{2}}$$

所以,当 $x=\tan\frac{\varphi}{2}$ 时,方程(1)具有形式 $p=\frac{4Rx}{1+x^2}+\frac{r}{x}$ 也就是

$$x^3-\frac{4R+r}{p}x^2+x-\frac{r}{p}=0 \qquad (2)$$

方程(2)具有根 $x_1=\tan\frac{A}{2}$,$x_2=\tan\frac{B}{2}$,$x_3=\tan\frac{C}{2}$. 在这些数不同的情况下,根据韦达定理,得到

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{p}$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$$

借助极限过程容易确信这些公式在数 $\tan\frac{A}{2}$,$\tan\frac{B}{2}$,$\tan\frac{C}{2}$ 有相等的情况下仍然正确.

现在将 $\sin\varphi$ 和 $\cot\frac{\varphi}{2}$ 通过 $x=\cos\varphi$ 来表示

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\sqrt{1-x^2}$$

$$\cot\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$$

在方程(1)中代入这些表达式,我们得到

*译自[俄]普拉索洛夫著《平面几何问题集》第6版(2007年)的附录,中译本即将由哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室出版.

$$p = \sqrt{1-x^2}\left(2R + \frac{r}{1-x}\right)$$

在 $x \neq 1$ 的情况下,这个方程化为

$$x^3 - \left(1 + \frac{r}{R}\right)x^2 + \left(\frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}\right)x - \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2} = 0$$

因此

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\cos A\cos B + \cos B\cos C + \cos C\cos A = \frac{p^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2}$$

$$\cos A\cos B\cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}$$

容易检验,当 $x = 2R\sin\varphi$ 时,方程(1)具有形式 $x^3 - 2px^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)x - 4Rrp = 0$,所以

$$a + b + c = 2p$$

$$ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2$$

$$abc = 4Rrp$$

类似的形式 $\sin\varphi$ 和 $\cot\frac{\varphi}{2}$,能够通过另外的三角函数来表示并代替这个表达式在方程(1)中.

当 $x = \tan\varphi$ 时,我们得到方程

$$[p^2 - (2R + r)^2]x^3 - 2prx^2 + (p^2 - 4Rr - r^2)x - 2pr = 0$$

当 $x = \sin^2\frac{\varphi}{2}$ 时,我们得到方程

$$16R^2x^3 - 8R(2R - r)x^2 + (p^2 + r^2 - 8Rr)x - r^2 = 0$$

当 $x = \cos^2\frac{\varphi}{2}$ 时,我们得到方程

$$16R^2x^3 - 8R(4R + r)x^2 + [p^2 + (4R + r)^2]x - p^2 = 0$$

2. 正多边形对角线的交点

已知有足够多的问题是有整数角度的三角形. 下面就是两个这样问题的例子.

问题1 在底边为 BC 的等腰三角形 ABC 中顶角 A 等于 $80°$. 在三角形内部取点 M,使得 $\angle MBC = 30°$ 和 $\angle MCB = 10°$(图2(a)). 证明:$\angle AMC = 70°$.

问题2 在底边为 AC 的等腰三角形 ABC 中顶角 B 等于 $20°$. 在边 BC 和 AB 上分别取点 D 和 E,使得 $\angle DAC = 60°$ 和 $\angle ECA = 50°$(图2(b)). 证明:$\angle ADE = 30°$.

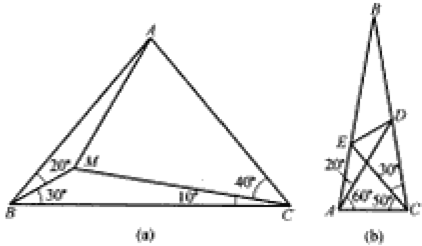


图2

这种类型的问题通常与正多边形的对角线的交点有联系,在给出问题的情况下,联系着正十八边形.

注意图3,这个图指明了问题1等价于下面的结论:

在正十八边形中,对角线 A_1A_{13}, A_3A_{14} 和 A_6A_{15} 交于一点.

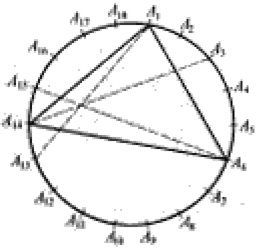


图3

实际上,这些对角线交于某个点 M,则

$$\angle A_1MA_6 = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_1A_6} + \overset{\frown}{A_{13}A_{15}}) = 50° + 20° = 70°$$

同样显然,$\triangle A_1A_6A_{14}$ 的三个内角等于 $80°$,$50°$,$50°$ 以及 $\angle MA_{14}A_6 = 30°$,$\angle MA_6A_{14} = 10°$.

问题2也是这样,它等价于下面的论断:在正十八边形中,对角线 A_1A_{14}, A_7A_{16} 和 $A_{11}A_{17}$ 交于一点(图4).

但问题2能够借助于完全另外的三条相交的对角线,也就是对角线 A_1A_{13}, A_3A_{14} 和 A_6A_{15} 来解(图5). 作为 $\triangle ABC$ 我们取 $\triangle A_{14}OA_{15}$. 对角线 A_1A_{13} 和 A_6A_{15} 关于对角线 A_3A_{14} 对称,所以两条对角线交直径于一点.

但我们暂时没有证明,在图3~5中的三条对角线组实际相交于一点. 三条对角线交于一点吗?利用

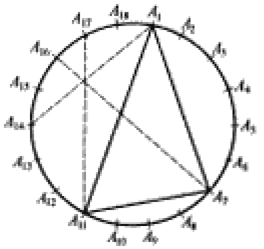


图 4

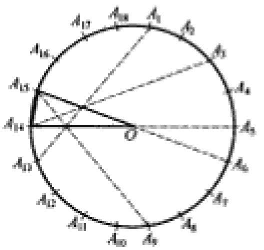


图 5

下面的定理检验是很方便的.

定理 1 在 $\triangle ABC$ 的边上取点 A_1, B_1, C_1(A_1 在 BC 上以此类推). 线段 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点,当且仅当 $\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}=1$.

证明 首先假设,线段 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点 O(图 6),则

$$2S_{\triangle AOB}:2S_{\triangle AOC}=(AB\cdot AO\sin\angle BAO):(AC\cdot AO\sin\angle CAO)$$

因此

$$1=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}\cdot\frac{S_{\triangle COA}}{S_{\triangle COB}}\cdot\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOA}}=\left(\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CA}{CB}\cdot\frac{BC}{BA}\right)\frac{\sin\angle BAO}{\sin\angle CAO}\cdot\frac{\sin\angle ACO}{\sin\angle BCO}\cdot\frac{\sin\angle CBO}{\sin\angle ABO}$$

即

$$\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}\cdot\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle BCC_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}=1$$

现在假设,对于点 A_1, B_1 和 C_1 成立指出的关系式. 设 O 是线段 AA_1 和 BB_1 的交点,必须证明线段 CC_1 通过点 O. 换言之,如果 C'_1 是线段 CO 和 AB 的交点,则 $C'_1=C_1$. 线段 AA_1, BB_1 和 CC'_1 相交于一点,所以正如必要条件中已经证明的

$$\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle CAA_1}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle ABB_1}\cdot\frac{\sin\angle ACC'_1}{\sin\angle BCC'_1}=1$$

比较这个公式与定理的条件,我们得到

$$\sin\angle ACC_1:\sin\angle BCC_1=\sin\angle ACC'_1:\sin\angle BCC'_1$$

剩下证明,当点 X 沿线段 AB 运动时,$\sin\angle ACX:\sin\angle BCX$ 的变化是单调的. $\angle ACX$ 和 $\angle BCX$ 自身单调变化,但它们的正弦在 $\angle C$ 是钝角的情况下能够是非单调的. 这不要紧,在任意三角形中都有锐角,我们从最开始能够取 $\angle C$ 作为三角形的锐角. 定理的证明完毕.

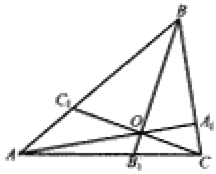


图 6

现在检验在图 3 中画的三条对角线组交于一点. 化归为检验恒等式

$$\frac{\sin 10^\circ}{\sin 70^\circ}\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin 10^\circ}=1$$

它的证明不复杂,即

$$\sin 30^\circ\sin 40^\circ=\frac{1}{2}\sin 40^\circ=$$

$$\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\sin 20^\circ\sin 70^\circ$$

在图 3 中画的三条对角线组对应的恒等式

$$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 20^\circ=\sin 30^\circ\sin 60^\circ\sin 10^\circ$$

还有三个恒等式导致相交的三条对角线组

$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 80^\circ=\sin 20^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ$$

$$\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ=\sin 10^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ$$

$$\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ=\sin 10^\circ\sin 10^\circ\sin 100^\circ$$

这三个不等式的检验我们留给读者.

转向注意,交换这些恒等式中的因子会导出完全另外相交的三条对角线组.

我们对十八边形,而没对另外的正多边形感兴趣,与由十八边形导出的三角形的内角都和 10° 的倍数有关系. 所有的顶点数小于十八的正多边形中,感兴趣的对角线相交组只是十二边形. 例如,正十二边形的对角线 A_1A_3, A_2A_6, A_3A_8 和 A_4A_{11} 相交于一点(图

7). 这个结论等价于下面很好的著名问题.

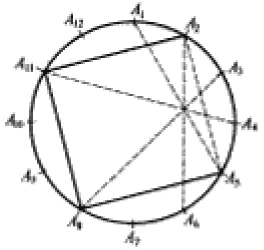


图7

问题3 在正方形 $ABCD$ 内取点 P,使得三角形 ABP 是等边三角形. 证明:$\angle PCD = 30°$.

练习题

(1) 已知 $\triangle ABC$ 中 $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$.

① 在边 BA 和 AC 上取点 D 和 E,使得 $\angle DCB = \angle EBC = 40°$. 证明:$\angle AED = 30°$.

② 在边 BA 和 BC 上取点 D 和 E,使得 $\angle DCA = 50°$ 和 $\angle EAC = 40°$. 证明:$\angle AED = 30°$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$, $\angle B$ 和 $\angle C$ 等于14°,62°和104°. 在边 AC 和 AB 上分别取点 D 和 E,使得 $\angle DBC = 50°$ 和 $\angle ECB = 94°$. 证明:$\angle CED = 34°$.

(3) 证明:正 $2n$ 边形的对角线 A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ 和 $A_{2n}A_5$ 相交于一点.

(4) 证明:正二十四边形的对角线 A_1A_7, A_3A_{11} 和 A_5A_{21} 相交于一点,这个交点在直径 A_4A_{16} 上.

(5) 证明:正三十边形的七条对角线 A_1A_{13}, A_2A_{17}, A_3A_{21}, A_4A_{24}, A_5A_{26}, A_8A_{29}, $A_{10}A_{30}$ 相交于一点.

3. 三次曲线与三角形的联系

每个三角形能够用许多种方法比对三次曲线,即形如方程给出的曲线

$$\sum_{i+j\le 3} a_{ij}x^iy^j = 0$$

某些这样的三次曲线具有有趣的几何性质. 这些三次曲线或者立方曲线,通常称为首先研究它的几何学家的名字:达布立方曲线、汤姆森立方曲线、诺伊贝格立方曲线、马克-凯亚立方曲线.

立方曲线最多的有兴趣的性质联系着三角形,或者换言之要利用关于这个三角形的等角共轭. 所以我们的叙述将依靠等角共轭的性质. 我们也将利用三线坐标. 不难理解,在三线坐标$(x:y:z)$中三次曲线是用形如以下的方程给出的

$$\sum_{i+j+k=3} c_{ijk}x^iy^jz^k = 0$$

最初立方曲线同三角形联系,借助不同形式的集合结构来确定. 但由这些立方曲线中最著名的能够得到统一的结构,这个结构根据下面的论断给出:

定理2 设在平面上给定点 F. 对于给定的 $\triangle ABC$ 我们考察所有可能的等角共轭点对 P 和 Q,使得直线 PQ 通过点 F. 则点 P 和 Q 落在立方曲线上,这个立方曲线通过三角形的各顶点,通过内心和三个旁心,也通过点 F 自身.

证明 设点 F 的三线坐标是$(f_1:f_2:f_3)$. 如果点 P 的三线坐标是$(x:y:z)$,则它的等角共轭点 Q 的三线坐标是$(x^{-1}:y^{-1}:z^{-1})$,也就是$(yz:zx:xy)$. 所以点 P,Q,F 共线的条件写作形式

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ x & y & z \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = 0$$

即

$$f_1x(y^2-z^2)+f_2y(z^2-x^2)+f_3z(x^2-y^2)=0 \tag{1}$$

容易检验,点 $F=(f_1:f_2:f_3)$,点 $A=(1:0:0)$,点 $B=(0:1:0)$,点 $C=(0:0:1)$ 和点 $I=(1:1:1)$, $I_a=(-1:1:1)$, $I_b=(1:-1:1)$, $I_c=(1:1:-1)$ 在由方程(1)给出的曲线上,也就是,指出点的坐标满足这个方程.

直接由曲线(1)的几何定义看出,当等角共轭下它变为自身. 实际上,如果点 P 在曲线(1)上,则它的等角共轭点 Q 也在曲线(1)上.

作立方曲线(1)借助的点 F 我们称作是这条曲线的旋转中心.

3.1 达布立方曲线

对于这条曲线的旋转中心是点 $\mathcal{H}$,它是高的交点 H 关于外接圆中心 O 的对称点. 容易检验,点 $\mathcal{H}$ 的三线坐标是

$(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma:\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha:\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta)$

其中 α,β,γ 是三角形的三个内角.

在三线坐标中,达布立方曲线用方程给出

$(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\cdots=0$

我们只写了对 $x(y^2-z^2)$ 的系数;对 $y(z^2-x^2)$

和 $z(x^2-y^2)$ 的系数的书写方式是显然的.

达布立方曲线通过下面的点:垂心和外接圆圆心.

达布立方曲线允许用下面的几何描述.

定理3 设 A_1, B_1, C_1 是点 D 在直线 BC, CA, AB 上的射影. 点 D 在达布立方曲线上当且仅当直线 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点.

证明 根据塞瓦定理,直线 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点,当且仅当

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

其中 AC_1 依此类推是线段的有向长(即如果点 C_1 在线段 AB 上,线段 AC_1 和 C_1B 具有相同的符号,而如果点 C_1 在线段 AB 外,则线段 AC_1 和 C_1B 具有相反的符号).

设 (x, y, z) 是点 D 的绝对三线坐标,即 x, y, z 是由点 D 到直线 BC, CA, AB 的顾及到符号的距离. 容易检验,$AC_1 = \frac{z\cos\alpha + y}{\sin\alpha}$ 依此类推. 所以直线 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点,当且仅当

$$(z\cos\alpha + y)(y\cos\gamma + x)(x\cos\beta + z) = (z\cos\beta + x)(x\cos\gamma + y)(y\cos\alpha + z)$$

得到的方程容易变换成达布立方曲线的方程.

注释1 如果等式

$$AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = C_1B \cdot A_1C \cdot B_1A$$

对某个点 D 成立,则这个等式对点 D 关于外接圆圆心的对称点 D' 也成立. 所以达布立方曲线关于外接圆圆心是对称的.

注释2 不复杂的证明,直线 AA_1, BB_1, CC_1 相交于一点,当且仅当存在二次曲线,它与三角形的边(或它们的延长线)相切于点 A_1, B_1, C_1.

3.2 汤姆森立方曲线

对于这个曲线的旋转中心是质心 M. 我们提醒您注意,三角形质心的三线坐标是$(bc:ca:ab)$.

在三线坐标中汤姆森立方曲线用方程 $bcx(y^2-z^2)+cay(z^2-x^2)+abz(x^2-y^2)=0$ 给出. 另外这个方程可以写作$(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\cdots=0$ 的形式.

汤姆森立方曲线通过下列各点:垂心和外接圆圆心、边的中点、高线的中点.

由对定理2的注释2看出,达布立方曲线允许用下面的几何描述:考察所有可能的与已知三角形的边或它们的延长线相切的二次曲线,从它们中分出这样形式的二次曲线,对三角形的边垂直于切点的垂线相交于一点. 则这些垂线的交点属于达布立方曲线. 可以证明,分出的这样形式的二次曲线的中心属于汤姆森立方曲线.

3.3 马克-凯亚立方曲线

对于这个曲线的旋转中心是外接圆圆心 O. 我们提醒您注意,外接圆中心的三线坐标是$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

在三线坐标中马克-凯亚立方曲线由方程

$$\cos\alpha x(y^2-z^2)+\cos\beta[y(z^2-x^2)]+\cos\gamma[z(x^2-y^2)]=0$$

给出.

马克-凯亚立方曲线通过下列各点:垂心和外接圆圆心.

定理4 设三角形的顶点在复平面上位于单位圆上的点 a, b, c. 对应复数 z 的点在马克-凯亚立方曲线上,当且仅当成立等式 $(z-a)(z-b)\cdot(z-c)=abc(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)$.

证明 设点 z 和 w 关于给定三角形等角共轭. 则根据莫尔利定理(问题29,45)点 z 和 w 联系着关系式

$$z+w+abc\bar{z}\bar{w}=a+b+c \tag{2}$$

因此

$$\bar{z}+\bar{w}+\overline{abc}zw=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} \tag{3}$$

关系式(3)两边乘以 $abc\bar{z}$ 且由所得到的表达式减去关系式(2),结果得到

$$w=\frac{a+b+c-z-(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}-\bar{z})abc\bar{z}}{1-|abcz|^2} \tag{4}$$

根据马克-凯亚立方曲线的定义直线 zw 通过外接圆圆心,即通过坐标原点. 这意味着$\frac{w}{\bar{w}}=\frac{z}{\bar{z}}$. 借助于关系式(4)表示$\frac{w}{\bar{w}}$,经过不复杂的变换以后我们得到需要的方程.

推论 马克-凯亚立方曲线交三角形的外接圆的三个点,是正三角形的三个顶点(我们考虑的只是不同于原来三角形顶点的交点).

证明 我们将认为,三角形的顶点在复平面上是单位圆上的点. 则对于位于三角形外接圆上的点 z,成立等式 $\bar{z}=z^{-1}$. 所以马克-凯亚立方曲线同外接圆的交点满足方程

$$(z-a)(z-b)(z-c)=$$

$$-z^{-3}abc(z-a)(z-b)(z-c)$$

如果排除三角形的顶点,则留下的点满足 $z^3=-abc$. 这些点形成正三角形.

我们认为,$\angle PQR$ 的量是向量$\overrightarrow{QP}$必须按逆时针旋转使得它同向量$\overrightarrow{QR}$一致.

定理5 点 M 在马克-凯亚立方曲线上,当且仅当

$$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

证明 我们重新认为,三角形的顶点在复平面的单位圆上. 假设 $\alpha=\angle MAB$,$\beta=\angle MBC$,$\gamma=\angle MCA$. 设 z 是与点 M 对应的复数. 则

$$\frac{b-a}{z-a}\cdot\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}=e^{2i\alpha}$$

即
$$e^{2i\alpha}=-b\frac{a\bar{z}-1}{z-a}$$

所以

$$e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}=-abc\frac{(a\bar{z}-1)(b\bar{z}-1)(c\bar{z}-1)}{(z-a)(z-b)(z-c)}$$

这样一来,点 z 在马克-凯亚立方曲线上当且仅当 $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}=-1$,即 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

容易检验,$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA+\angle MAC+\angle MCB+\angle MBA=(2n+1)\pi$. 所以点 M 在马克-凯亚立方曲线上,当且仅当

$$\angle MAB+\angle MBC+\angle MCA=$$
$$\angle MAC+\angle MCB+\angle MBA=2l\pi$$

我们不加证明注意马克-凯亚立方曲线下列的性质,它们是费尔巴哈定理的推广:由马克-凯亚立方曲线上任意一点向 $\triangle ABC$ 的边(或它们的延长线)引的垂线的垂足为顶点的三角形的外接圆与 $\triangle ABC$ 的九点圆相切.

3.4 诺伊贝格立方曲线

对于这个曲线的旋转中心是直线 OH 的无限远点. 换言之,诺伊贝格立方曲线由这样的等角共轭点对 P 和 Q 组成,直线 PQ 平行于直线 OH.

在三线坐标中达布立方曲线用以下方程给出

$$(\cos\alpha-2\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\cdots=0$$

诺伊贝格立方曲线按通过三角形著名点来说是无可争议的领袖. 实际上,这条曲线通过下列各点:外接圆圆心、垂心、以 $\triangle ABC$ 的边作的正三角形的顶点(无论向外,还是向内作)、$\triangle ABC$ 的顶点关于他的边的对称点、对 $\triangle ABC$ 的边的视角为60°或120°两个点(三角形的等角心)、成立关系式 $AX\cdot BC=BX\cdot CA=CX\cdot AB$ 的两个点(三角形的等力心).

3.5 另外描述的三次曲线

对于上面考察的达布、汤姆森、马克-凯亚,诺伊贝格立方曲线旋转中心在欧拉线 OH 上,三次曲线的旋转中心在欧拉线上,能够利用另外的几何结构来建构. 这个结构根据下面的论断给出:

定理6 设 A_1,B_1,C_1 是由点 P 引向直线 BC,CA,AB 的垂线的垂足,而 $\triangle A_2B_2C_2$ 由 $\triangle A_1B_1C_1$ 经过位似心为 P 且位似系数为 k 的位似而得到. 则当固定 $k\neq 0$ 和点 P,直线 AA_2,BB_2,CC_2 相交于一点,在立方曲线上.

证明 设 (x,y,z) 是点 P 的三线坐标. 则点 A_2 具有三线坐标 $((1-k)x,y+kx\cos\gamma,z+kx\cos\beta)$.

所以直线 AA_2 由系数为 $(0,-z-kx\cos\beta,y+kx\cos\gamma)$ 的线性方程给出. 因此,直线 AA_2,BB_2,CC_2 相交于一点当且仅当行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -z-kx\cos\beta & ykx\cos\gamma \\ z+ky\cos\alpha & 0 & -x-ky\cos\gamma \\ -y-kz\cos\alpha & x+kz\cos\beta & 0 \end{vmatrix}=$$
$$k(\cos\alpha-k\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\cdots=0$$

当 $k=1$ 时得到达布立方曲线,当 $k=-1$ 时得到汤姆森立方曲线,而当 $k=2$ 时,是诺伊贝格立方曲线. 如果形式地进行,马克-凯亚立方曲线不保持这个结构. 但自然认为,它是 $k=0$ 的情况.

现在我们研究在简述定理中表述的另外结构,这就是,我们固定点 P 且认为数 k 是变量. 对于怎样的点 P 对所有的数 k,直线 AA_2,BB_2,CC_2 相交于一点?这些直线的交点将在怎样的曲线上?

直线 AA_2,BB_2,CC_2 当对所有的 k 相交于一点,当且仅当对所有的 k 点 P 在三次曲线上

$$(\cos\alpha-k\cos\beta\cos\gamma)x(y^2-z^2)+\cdots=0$$

我们知道九个这样的点:A,B,C,I,I_a,I_b,I_c,H,O. 两条立方曲线相交于有限个点,不能多余九个公共点. 所以怎样的点 P 能具有需要的性质只在例外的情况. 例如,在正三角形的情况下在高或它的延长线上的所有点具有这些性质.

如果 $P=A,B,C$ 或 H,则直线 AA_2,BB_2,CC_2 对所有的 k 相交于点 P. 有趣的情形对应的只是外接圆圆心、内切圆圆心和三个旁切圆圆心.

定理7 ①如果 $P=O$,则直线 AA_2,BB_2,CC_2 的

交点在欧拉线 OH 上.

② 如果 $P=I(P=I_a)$，则直线 AA_2，BB_2，CC_2 的交点在与直线 OI（直线 OI_a）等角共轭的双曲线上.

证明 ① 设直线 AA_2，BB_2，CC_2 交点的三线坐标为 (x',y',z'). 直线 AA_2 的方程指出

$$\frac{y'}{z'}=\frac{y+kx\cos\gamma}{z+kx\cos\beta}=\frac{\cos\beta+k\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\gamma+k\cos\alpha\cos\beta}$$

因为点 O 的三线坐标是 $(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，所以 $(x',y',z')=(\cos\alpha+k\cos\beta\cos\gamma:\cos\beta+k\cos\alpha\cos\gamma:\cos\gamma+k\cos\alpha\cos\beta)$. 所有这样的点在直线 OH 上.

② 仅限于分析 $P=I$ 的情况. 在这个情况下 $(x,y,z)=(1,1,1)$，所以

$$\frac{y'}{z'}=\frac{y+kx\cos\gamma}{z+kx\cos\beta}=\frac{1+k\cos\gamma}{1+k\cos\beta}$$

这样一来，点 (x',y',z') 的等角共轭点具有三线坐标 $(1+\cos\alpha:1+k\cos\beta:1+k\cos\gamma)$，所有这样的点在直线 OI 上.

一道经典面试题的解析与推广

彭　刚　王云亮

（广西师范大学数学科学学院，广西　桂林　541004）

1. 面试题(google)

有一个100层高的大厦，从这个大厦的某一层扔下棋子恰好就会碎(称这一层为临界层)．请你用手中的两个玻璃围棋子，找出一个最优的策略来得知那个临界层．

分析：题目要求策略最优，因而要使得在最坏的情况下投掷的总次数 T_{max} 最少．首先考虑只有一个棋子的情况，条件若为多个棋子则均可转化为一个棋子的情况．

2. 解答

（1）一个棋子：棋子必须在临界层扔下的时候碎，所以唯一的策略是从第1层开始往上逐层投掷．此时 $T_{max}=99$，临界层为第99层或第100层*．

（2）两个棋子：利用多的这个棋子缩小查找的范围，因而把100层分成若干段：先用一个棋子来确定临界层所在的段(称为临界段)，再利用另一个棋子确定临界层，总的投掷次数等于确定临界段的次数 n_1 与确定临界层的次数 n_2 的和．

现把100层平均分成 n 段(n 是100的正因数)，有

$$T_{max}=(n-1)+\left(\frac{100}{n}-1\right)=n+\frac{100}{n}-2$$

由均值不等式可知 $n=10$ 时，$T_{max}=18$ 为最小值，此时临界段为第80－90层，临界层为第89层．如果把100层分成12段($100=9\times11+1$)：1～9，10～18，…，91～99，100，与上述 $n=10$ 的情况相比虽然每段的层数在减少(从而 n_1 有所减少)，但所分的段数有所增加(从而 n_2 有所增加)，因而 T_{max} 并没有减少．如果把100层分成其他段(比如9段：$100=12\times8+4$)，情况也如此．

根据上面的讨论，如何把100层合理的"分段"是解决问题的关键．上述对大楼100层所分段数的调整并没有使得 $T_{max}=18$ 减少的原因在于每段包含的层数比较均匀(图1)，因而出现 n_1 与 n_2 此消彼长的情况．鉴于此，我们作以下方式的调整：

把100层分成若干段，从下往上每段的层数逐渐少1(图2)，这样就使得在最坏的情况下 n_1 增加1的同时 n_2 减少1，因而 n_1 与 n_2 的总和不变(等于第一段的层数 n)．为确定 n 的值，只需解不等式 $n+(n-1)+\cdots+1\geq100$，得到 $n=14$，从而有如下最优策略：

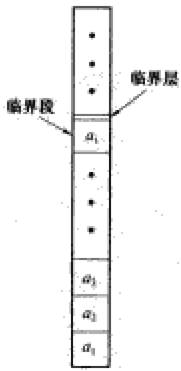


图1

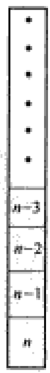


图2

从第14层开始扔第一枚棋子，如果没有碎则从第 $14+13=27$ 层开始扔，如果还没有碎则从 $14+13+12=39$ 层开始扔，依此类推．此时 $T_{max}=14$，临界层可为第27层、第39层、…、第99层．

推广　从上面的讨论可以发现此题的关键是(高阶)等差数列：

两个棋子：1 2 3 4 5 … $\sum_{i=1}^{n}C_i^1\geq100$

---

* 由题可知棋子在第100层一定会碎，所以如果从第99层扔下不碎的话便可知道临界层即为第100层．此外，我们还假定存在临界层为第1层，即棋子从第1层扔下便碎的情况．

三个棋子:1 3 6 10 15 … $\sum_{i=2}^{n} C_i^2 \geqslant 100$

⋮

因而我们还可以探讨大楼有 m 层,棋子有 k 个的情况:考虑不等式 $\sum_{i=1}^{n} C_i^k \geqslant m$ 即可.

参考文献

[1] 布莱尔·沃森. 世界500强面试题[M]. 朱丽,等译. 北京:中国青年出版社,2004.

[2]《程序员》编辑部. 面试题大解析之三 —— 无声的声音[J]. 程序员,2007(3):65.

作者简介

彭刚,1978 年生,男,汉族,湖北随州人。2005 年毕业于首都师范大学数学科学学院,现任广西师范大学数学科学学院讲师,广西21世纪园丁工程导师,主要从事数学课程与教学论以及初等数学的研究,在《数学通报》等期刊发表论文多篇。

王云亮,1986 年生,男,汉族,山东费县人。广西师范大学数学科学学院 2005 级数学与应用数学本科生。

两个猜想不等式的证明

张玉明[1]　褚小光[2]

(1. 苏州市相城实验中学,苏州　215131;
2. 苏州恒天商贸有限公司,苏州　215128)

在文献[1]中,刘保乾提出(即 LBQ60):设 $BC=a,CA=b,AB=c;m_a,m_b,m_c$ 分别表示 $\triangle ABC$ 相应边上的中线,猜测成立

$$(m_b+m_c)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+$$
$$(m_c+m_a)(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+$$
$$(m_a+m_b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 6\sqrt{3} \qquad (1)$$

LBQ60 成立,且可推广如下:

命题 1　设 P 是 $\triangle ABC$ 平面上一动点,则

$$(PB+PC)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+$$
$$(PC+PA)(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+$$
$$(PA+PB)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

在式(2)中,当 P 点为三角形的重心时即为 LBQ60. 设 h_a,h_b,h_c 分别表示 $\triangle ABC$ 相应边上的高线,Δ 表示 $\triangle ABC$ 的面积,则不等式等价于

$$(PB+PC)(h_b+h_c)+$$
$$(PC+PA)(h_c+h_a)+$$
$$(PA+PB)(h_a+h_b)\geqslant 8\sqrt{3}\Delta \qquad (3)$$

设 R,r 分别表示 $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆半径,在文献[2]中,笔者证明了江西刘健提出的猜想(即 She79):

$$(PB+PC)^2+(PC+PA)^2+$$
$$(PA+PB)^2\geqslant 24Rr \qquad (4)$$

湖南尹华焱对比了式(2)、(4),提出了(即命题 2):

命题 2　设 P 是 $\triangle ABC$ 平面上一动点,则

$$(m_b+m_c)(PB+PC)+$$
$$(m_c+m_a)(PC+PA)+$$
$$(m_a+m_b)(PA+PB)\geqslant 36Rr \qquad (5)$$

本文将证明不等式(2)与(5),为此先给出四个引理.

引理 1　设 P 是 $\triangle ABC$ 平面上任意一点,则(参见文献[3])

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}} \qquad (6)$$

引理 2　设 P 是 $\triangle ABC$ 平面上任意一点,R,r,s 分别表示 $\triangle ABC$ 的外接圆、内切圆半径和半周长[4]. 则

$$PA+PB+PC\geqslant\sqrt{s^2+2r^2\cdot\frac{4R+r}{R}} \qquad (7)$$

引理 3　设 P 是 $\triangle ABC$ 平面上任意一点. 则

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geqslant\sqrt{\frac{4R-2r}{R}} \qquad (8)$$

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(PA+PB+PC)\geqslant\sqrt{\frac{25R+4r}{R}} \qquad (9)$$

证明　先证式(8). 根据引理 1,欲证式(8)只需证

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\geqslant\sqrt{\frac{4R-2r}{R}} \qquad (10)$$

根据恒等式 $16s^2r^2=2\sum b^2c^2-\sum a^4,abc=4Rrs,2s=a+b+c,8sr^2=\prod(b+c-a)$,式(10)两边平方化简整理等价于

$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqslant abc(a+b+c)\Leftrightarrow$
$a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\geqslant 0$

最后一式显然成立,故式(10)、(8)成立.

再证式(9). 根据引理 2,欲证式(9)只需证

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\cdot\sqrt{s^2+2r^2\cdot\frac{4R+r}{R}}\geqslant\sqrt{\frac{25R+4r}{R}} \qquad (11)$$

根据恒等式 $\sum bc=s^2+4Rr+r^2,abc=4Rrs$,式(11)两边平方化简等价于

$Rs^6+r(8R^2+10Rr+2r^2)s^4-$
$r^2(384R^3-8R^2r-33Rr^2-4r^3)s^2+$

$2r^4(4R+r)^3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$[Rs^4 + r(24R^2+6Rr)s^2 +$

$r^3(8R^2-39Rr-8r^2)] \cdot$

$(s^2-16Rr+4r^2+\frac{2r^3}{R}) +$

$\frac{4r^4}{R}(64R^3-12R^2r-15Rr^2-2r^3)(R-2r) \geq 0$

根据 Gerretsen 不等式的加强式：$s^2-16Rr+4r^2+\frac{2r^3}{R} \geq 0$ 和 Euler 不等式：$R-2r \geq 0$，即知上式成立，故式(11)、(9) 成立. 从而引理 3 获证.

备注：根据不等式(9)，即得严格不等式

$$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(PA+PB+PC) > 5 \quad (12)$$

引理 4 设 P 是 $\triangle ABC$ 平面上任意一点[5]

$$PAm_a + PBm_b + PCm_c \geq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \quad (13)$$

下面根据四个引理来证明不等式(2)、(5).

命题 1 证明 下面证明式(2) 的加强式，即

$$(PB+PC)(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) + (PC+PA)(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}) + (PA+PB)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \geq \sqrt{\frac{49R-2r}{R}} \Leftrightarrow \quad (14)$$

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c} + (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(PA+PB+PC) \geq \sqrt{\frac{49R-4r}{R}}$$

根据引理 3，只需证

$$\sqrt{\frac{4R-2r}{R}} + \sqrt{\frac{25R+4r}{R}} \geq \sqrt{\frac{49R-2r}{R}} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4R-2r} + \sqrt{25R+4r} \geq \sqrt{49R-2r} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4R-2r} \cdot \sqrt{25R+4r} \geq 10R-2r$$

上式两边平方，整理等价于

$$6r(R-2r) \geq 0$$

根据 Euler 不等式：$R-2r \geq 0$，即知成立. 故不等式(14) 获证，从而命题 1 成立.

命题 2 证明 在不等式(7) 中，令 P 点为 $\triangle ABC$ 的重心即得

$$m_a+m_b+m_c \geq \frac{3}{2}\sqrt{s^2+2r^2 \cdot \frac{4R+r}{R}} \quad (15)$$

式(5) 等价于

$$(PA+PB+PC)(m_a+m_b+m_c) + m_aPA+m_bPB+m_cPC \geq 36Rr \quad (16)$$

根据不等式(7)，(13)，(15)，欲证式(16) 只需证

$$\frac{3}{2}(s^2+2r^2 \cdot \frac{4R+r}{R}) + s^2 - r(4R+r) \geq 36Rr \Leftrightarrow$$

$$5s^2 - 80Rr + 22r^2 + \frac{6r^3}{R} \geq 0$$

根据 Gerretsen 不等式的加强式：$s^2-16Rr+4r^2+\frac{2r^3}{R} \geq 0$ 和 Euler 不等式：$R-2r \geq 0$，即知上式成立，故不等式(16) 获证，从而命题 2 成立.

参考文献

[1] 褚小光. 涉及三角形一动点的一类不等式[J]. 宜宾师院学报，2006，(6)：18-21.

[2] 褚小光. 关于三角形一动点的若干不等式[J]. 滨州师专学报，2001，(2)：34-39.

[3] 褚小光. 一个新几何不等式[J]. 中等数学，2002，(2)：18.

[4] 褚小光，刘健. 一类几何不等式的一个新结果[J]. 吉首大学学报，2003，(6)：68-71.

一个三元二次型不等式及若干推论

张玉明　　褚小光

（1. 苏州市相城实验中学，江苏　苏州　215131；
2. 苏州恒天商贸有限公司，江苏　苏州　215128）

定理　设 P 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点，令 $PA=R_1$，$PB=R_2$，$PC=R_3$，P 至 $\triangle ABC$ 边 BC,CA,AB 的距离分别为 r_1,r_2,r_3；记 r_a,r_b,r_c 为 $\triangle ABC$ 相对应边上的旁切圆半径；$x,y,z\in\mathbf{R}$. 则

$$\frac{R_2+R_3}{r_b+r_c}x^2+\frac{R_3+R_1}{r_c+r_a}y^2+\frac{R_1+R_2}{r_a+r_b}z^2\geqslant \frac{r_2+r_3}{r_a}yz+\frac{r_3+r_1}{r_b}zx+\frac{r_1+r_2}{r_c}xy \quad (1)$$

当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心且 $x:y:z=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$ 时，式(1)等号成立.

证明　过 P 点分别作：$PD\perp BC$，$PE\perp CA$，$PF\perp AB$，分别交边 BC,CA,AB 于 D,E,F. 在 $\triangle APE$，$\triangle APF$ 中，有

$$r_2=R_1\sin\angle PAE$$
$$r_3=R_1\sin\angle PAF$$

所以有

$$r_2+r_3=R_1(\sin\angle PAE+\sin\angle PAF)=2R_1\sin\frac{A}{2}\cos\frac{\angle PAE-\angle PAF}{2}\leqslant 2R_1\sin\frac{A}{2}$$

即

$$r_2+r_3\leqslant 2R_1\sin\frac{A}{2} \quad (2.1)$$

同样可证

$$r_3+r_1\leqslant 2R_2\sin\frac{B}{2} \quad (2.2)$$

$$r_1+r_2\leqslant 2R_3\sin\frac{C}{2} \quad (2.3)$$

当且仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时，式(2)等号成立.

根据不等式组(2)，欲证不等式(1)，只需证

$$\left[\frac{r_3+r_1}{2\sin\frac{B}{2}}+\frac{r_1+r_2}{2\sin\frac{C}{2}}+\right]\frac{x^2}{r_b+r_c}+\left[\frac{r_1+r_2}{2\sin\frac{C}{2}}+\frac{r_2+r_3}{2\sin\frac{A}{2}}+\right]\frac{y^2}{r_c+r_a}+\left[\frac{r_2+r_3}{2\sin\frac{A}{2}}+\frac{r_3+r_1}{2\sin\frac{B}{2}}\right]\frac{z^2}{r_a+r_b}\geqslant \frac{r_2+r_3}{r_a}yz+\frac{r_3+r_1}{r_b}zx+\frac{r_1+r_2}{r_c}xy$$

根据已知三角形恒等式

$$\frac{1}{\sqrt{r_c+r_a}\cdot\sqrt{r_a+r_b}}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{r_a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_a+r_b}\cdot\sqrt{r_b+r_c}}=\frac{\sin\frac{B}{2}}{r_b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_b+r_c}\cdot\sqrt{r_c+r_a}}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{r_c}$$

上式配方整理等价于

$$\frac{r_2+r_3}{2\sin\frac{A}{2}}\left[\frac{y}{\sqrt{r_c+r_a}}-\frac{z}{\sqrt{r_a+r_b}}\right]^2+\frac{r_3+r_1}{2\sin\frac{B}{2}}\left[\frac{z}{\sqrt{r_a+r_b}}-\frac{x}{\sqrt{r_b+r_c}}\right]^2+\frac{r_1+r_2}{2\sin\frac{C}{2}}\left[\frac{x}{\sqrt{r_b+r_c}}-\frac{y}{\sqrt{r_c+r_a}}\right]^2\geqslant 0 \quad (3)$$

式(1)显然成立，故不等式(1)得证. 易验当 $x:y:z=\sqrt{r_b+r_c}:\sqrt{r_c+r_a}:\sqrt{r_a+r_b}$，即 $x:y:z=\cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$，且 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时，式(1)等号成立，定理证毕.

下面将根据不等式(1)，简单的不等式与恒等式，推导若干新结论.

设 m_a, m_b, m_c 分别表示 $\triangle ABC$ 对应边上的中线. 在锐角 $\triangle ABC$ 中,易证下述简单三角形不等式组

$$r_b + r_c \geqslant 2m_a, r_c + r_a \geqslant 2m_b, r_a + r_b \geqslant 2m_c \quad (4)$$

将不等式组(4) 依次代入不等式(1) 中,则得刘健在文献[1] 中提出的猜想.

推论1 设 P 是锐角 $\triangle ABC$ 内部任意一点,则

$$\frac{R_2 + R_3}{m_a}x^2 + \frac{R_3 + R_1}{m_b}y^2 + \frac{R_1 + R_2}{m_c}z^2 \geqslant$$

$$2\frac{r_2 + r_3}{r_a}yz + 2\frac{r_3 + r_1}{r_b}zx + 2\frac{r_1 + r_2}{r_c}xy \quad (5)$$

关于不等式(5),原猜想条件为在任意三角形. 在任意三角形中是否成立,还待证实.

根据已知恒等式:

$$\frac{r_2 + r_3}{r_a} + \frac{r_3 + r_1}{r_b} + \frac{r_1 + r_2}{r_c} = 2 \quad (6)$$

在不等式(1) 中取: $x = y = z$,则得:

推论2 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点,则

$$\frac{R_2 + R_3}{r_b + r_c} + \frac{R_3 + R_1}{r_c + r_a} + \frac{R_1 + R_2}{r_a + r_b} \geqslant 2 \quad (7)$$

根据三角形恒等式: $r_a(s - a) = r_b(s - b) = r_c(s - c) = sr = \Delta$,经等价变换,不等式(7) 等价于下列两式

$$\frac{R_2 + R_3}{a(s - a)} + \frac{R_3 + R_1}{b(s - b)} + \frac{R_1 + R_2}{c(s - c)} \geqslant \frac{2}{r} \quad (8)$$

$$\frac{R_2 + R_3}{a} \cdot r_a + \frac{R_3 + R_1}{b} \cdot r_b + \frac{R_1 + R_2}{c} \cdot r_c \geqslant$$

$$a + b + c \quad (9)$$

其中 $BC = a, CA = b, AB = c, s, \Delta, R, r$ 分别表示 $\triangle ABC$ 的半周长、面积、外接圆半径与内切圆半径. 在 $\triangle ABC$ 中,有已知不等式

$$aR_1 + bR_2 + cR_3 \geqslant 4\Delta \quad (10)$$

不等式(10) 经恒等变换等价于

$$\frac{R_2 + R_3}{a}(r_b + r_c) +$$

$$\frac{R_3 + R_1}{b}(r_c + r_a) +$$

$$\frac{R_1 + R_2}{c}(r_a + r_b) \geqslant$$

$$2(a + b + c) \quad (11)$$

不等式(10) + 不等式(11),再由已知恒等式: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$,即得:

推论3 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点,则

$$\frac{R_2 + R_3}{a} + \frac{R_3 + R_1}{b} + \frac{R_1 + R_2}{c} \geqslant \frac{6s}{4R + r} \quad (12)$$

经恒等变换,恒等式(6) 等价于

$$\frac{r_2 + r_3}{a}(r_b + r_c) + \frac{r_3 + r_1}{b}(r_c + r_a) +$$

$$\frac{r_1 + r_2}{c}(r_a + r_b) = 2s \quad (13)$$

而易证下列不等式组

$$r_b + r_c \geqslant 2\sqrt{s(s - a)}$$

$$r_c + r_a \geqslant 2\sqrt{s(s - b)}$$

$$r_a + r_b \geqslant 2\sqrt{s(s - c)} \quad (14)$$

据此可得

推论4 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点,则

$$\frac{r_2 + r_3}{a} \cdot \sqrt{s - a} + \frac{r_3 + r_1}{b} \cdot \sqrt{s - b} +$$

$$\frac{r_1 + r_2}{c} \cdot \sqrt{s - c} \leqslant \sqrt{s} \quad (15)$$

最后我们提出如下猜想:

猜想 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点,则

$$\frac{r_2 + r_3}{a} \cdot m_a + \frac{r_3 + r_1}{b} \cdot m_b + \frac{r_1 + r_2}{c} \cdot m_c \leqslant s \quad (16)$$

参考文献

[1] 刘健. 一个新的三元二次 Erdos-Mordell 型不等式[J]. 华东交通大学学报,2003,5:123-135.

周界中点三角形两个面积不等式的推广

沈　毅

（重庆市合川太和中学，重庆　401555）

设 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 各边 BC,CA,AB 上的周界中点（即 AD,BE,CF 分别平分 $\triangle ABC$ 的周长），则 AD,BE,CF 三线共点，称为界心. 若 $\triangle ABC$，$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$，$\triangle DEF$ 的面积分别记为 $\Delta,\Delta_A,\Delta_B,\Delta_C,\Delta_0$，文[1]和文[2]中分别证明了不等式 $\Delta \geq 4\Delta_0$，$\Delta \geq 64\Delta_A\Delta_B\Delta_C$.

本文将证明：对于一般三角形内点 P，相应的不等式仍为真，并且给出这两个下界的比较.

命题　P 是 $\triangle ABC$ 的任一内点，D,E,F 分别是 P 与 A,B,C 的连线和对边的交点，记 $\triangle ABC$，$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$，$\triangle DEF$ 的面积分别为 $\Delta,\Delta_A,\Delta_B,\Delta_C,\Delta_0$. 则 $\Delta_0^3 \leq \Delta_A\Delta_B\Delta_C \leq \dfrac{\Delta^3}{64}$，等号成立当且仅当 P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

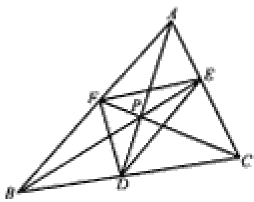


图 1

证明　不失一般性，设 Δ 为 1，$\dfrac{AF}{FB}=x$，$\dfrac{BD}{DC}=y$，$\dfrac{CE}{EA}=z$. 由塞瓦定理知 $xyz=1$.

则易知 $\Delta_A=\dfrac{x}{(1+x)(1+z)}$，$\Delta_B=\dfrac{y}{(1+y)(1+x)}$，$\Delta_C=\dfrac{z}{(1+z)(1+y)}$.

则不等式 $\Delta_0^3 \leq \Delta_A\Delta_B\Delta_C$ 等价于

$$\frac{1}{[(1+x)(1+y)(1+z)]^2} \geq \left[1-\frac{x}{(1+x)(1+z)}-\frac{y}{(1+y)(1+x)}-\frac{z}{(1+z)(1+x)}\right]^3 \Leftrightarrow$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq [(1+x)(1+y)(1+z)-x(1+y)-y(1+z)-z(1+x)]^3 \Leftrightarrow$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8$$

而 $\Delta_A\Delta_B\Delta_C \leq \dfrac{\Delta^3}{64}$ 也等价于 $\dfrac{1}{[(1+x)(1+y)(1+z)]^2} \leq \dfrac{1}{64} \Leftrightarrow (1+x)(1+y)(1+z) \geq 8$.

由于 $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{z}=8$. 所以 $\Delta_0^3 \leq \Delta_A\Delta_B\Delta_C$ 和 $\Delta_A\Delta_B\Delta_C \leq \dfrac{\Delta^3}{64}$ 都成立. 至此命题得证. 等号成立当且仅当 $x=y=z$，即 P 是 $\triangle ABC$ 的重心.

参考文献

[1] 杨国荣. 关于周界中点三角形的两个不等式[J]. 中学数学研究，2002，8.

[2] 丁遵标. 周界中点三角形的两个不等式[J]. 福建中学数学，2002，8.

作者简介

沈毅，男，1982 年生，中学二级教师，本科学历，现任教于重庆市合川太和中学高中部. 主要研究方向为数学教育、数学竞赛、初等数学、数学命题研究. 曾在《中等数学》、《数学通报》、《数学教学》、《中学生数学（高中版）》、《中学生数学（初中版）》、《中学数学教学》、《中学教研（数学）》、《中学数学研究（江西师大）》、《中学数学研究（华南师大）》、《中学数学月刊》、《中学数学杂志》、《数学教学通讯》、《现代中学数学》等数学期刊上发表文章 40 余篇. 此外还参与了本校多个课题研究工作.

凸函数的一些性质

邓博文

（华东师大二附中高二（一），上海　200062）

按照 Hardy 等人[1] 的说法，“凸函数的基础是由 Jensen[2] 奠定的”. 虽然在此以前，Holder 已做过一些讨论. John Jensen 是业余数学家，一直担任哥本哈根电话公司的技术部部长. 他在 1906 年的论文[3] 中，定义凸函数如下：

如果定义在某一区间上的函数 $f(x)$，对于这区间内的任两点 x, y，均有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (1)$$

那么 $f(x)$ 就称为这个区间上的凸函数.

在函数 $f(x)$ 连续时，Jensen 由式(1) 推出更一般的结论：对上述凸函数及任意满足

$$p+q=1 \qquad (2)$$

的正实数，均有

$$f(px+qy) \leqslant pf(x)+qf(y) \qquad (3)$$

通常也用式(3) 作为凸函数的定义. 式(2)，(3) 都可以推广至自变量的 n 个值. 即对上述函数有

$$f(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n) \leqslant p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n) \qquad (4)$$

其中正实数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$（称为“权”）满足

$$p_1+p_2+\cdots+p_n=1 \qquad (5)$$

如果 $f(x)$ 在区间上有导数，那么式(3) 与导数 $f'(x)$ 递增等价. 如果 $f(x)$ 在区间上有二阶导数，那么式(3) 与下式等价

$$f''(x) \geqslant 0 \qquad (6)$$

利用式(6) 不难证明一些初等函数的凸性（如 $y=x^2, y=a^x$，等）.

凹函数可以类似地定义，只需将上述不等式改为相反的方向.

凸（凹）函数在不等式的证明中极为有用. 这里举一个例子.

例 1　求证：对所有正实数 a, b, c，有

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1 \qquad (7)$$

这是 2001 年 42 届国际数学竞赛的第 2 题. 美国的韩裔学生伊恩 · 李用函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的凹性直接得到

$$\text{式(7) 左边} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{\sum \frac{a}{a+b+c}(a^2+8bc)}} = \frac{(a+b+c)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\sum a^3+24abc}} \geqslant 1$$

由凸函数 $y=f(x)$ 的图像及弦的斜率可以看出：对定义区间中的点 $x>u>v>y$，有

$$\frac{f(x)-f(v)}{x-v} \geqslant \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \qquad (8)$$

$$\frac{f(x)-f(v)}{x-v} \geqslant \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \qquad (9)$$

$$\frac{f(x)-f(v)}{x-v} \geqslant \frac{f(v)-f(y)}{v-y} \qquad (10)$$

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \geqslant \frac{f(v)-f(y)}{v-y} \qquad (11)$$

证明均不难. 式(8)$\Leftrightarrow (v-y)f(x)+(x-v)f(y) \geqslant (x-y)f(v)$.

而由式(3)

$$\frac{v-y}{x-y}f(x)+\frac{x-v}{x-y}f(y) \geqslant f\left(\frac{v-y}{x-y}x+\frac{x-v}{x-y}y\right)=f(v)$$

所以式(8) 成立.

同理式(9)，(10) 成立. 由式(10)

$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} \geqslant \frac{f(u)-f(v)}{u-v} \geqslant \frac{f(v)-f(y)}{v-y}$$

即式(11) 成立.

在 $u+v=x+y$ 时，由式(11) 得到

$$f(x)+f(y) \geqslant f(u)+f(v) \qquad (12)$$

对于仅有一个拐点，先凹后凸的函数，利用式(12) 可以得到下面的命题：

命题　定义在区间 $(a,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，如果在区间 $(a,c]$ 上凹，在区间 $[c,+\infty]$ 上凸，那么对于区间 $(a,+\infty)$ 内、和为定值 $C \geqslant nc$ 的 n 个数

$x_i(i=1,2,\cdots,n)$

$$\sum f(x_i) \leqslant (n-1)f(u)+f(v)$$

其中，$u \in (a,c]$，$v \in [c,+\infty)$，$(n-1)u+v=C$.

证明　由于 $C \geqslant nc$，必有一些 $x_i \geqslant c$. 设 $c \leqslant x_k \leqslant \cdots \leqslant x_n$，则由式(12)

$$f(x_k)+f(x_n) \leqslant f(c)+f(x_k+x_n-c)$$

依此进行，直至在$[c,+\infty)$中的数改变成$(n-k)$个 c 及一个 $v=x_k+\cdots+x_n-(n-k)c$. 最后，在区间$(a,c]$上利用凹性，得出 $n-1$ 个函数值的和小于等于$(n-1)f(u)$.

对于其他形式的区间或者先凸后凹的函数也有类似的结果.

例 2　正实数 a,b,c 的积为 8. 证明

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}<2$$

证明　设$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$，则$f''(x)=\frac{1}{4}e^x(1+e^x)^{\frac{5}{2}}(e^x-2)$. $f(x)$ 在$(0,\ln 2)$上是凹函数，在区间$(\ln 2,+\infty)$上是凸函数. $\ln a+\ln b+\ln c=\ln 8$. 由上述命题，只需证明$\frac{2}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}<2$，其中 $a^2c=8$，$a \leqslant c$. 不难得出

$$\frac{1}{\sqrt{1+c}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+8}} \leqslant \frac{\sqrt{2}a}{a+\sqrt{8}}<\frac{\sqrt{2}a}{a+1+\sqrt{1+a}}<$$

$$\frac{2(\sqrt{1+a}-1)}{\sqrt{1+a}}=2-\frac{2}{\sqrt{1+a}}$$

例 3　给定正整数 n. 求最小的正数 λ，使得对于任意 $\theta_i \in (0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,\cdots,n)$，只要

$$\tan\theta_1\tan\theta_2\cdots\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$$

就有 $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n$ 不大于 λ.

这是2003年中国数学奥林匹克的第3题. 设 $x=2\ln(\tan\theta)$，$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$. 问题即 $\sum x_i=n\ln 2$ 时，求最小的 λ，使得 $\sum f(x_i)<\lambda$. 在 $n \geqslant 3$ 时，与例2相同，只需证明$\frac{n-1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}<n-1$，其中 $x \leqslant 2 \leqslant y$，$x^{n-1}y=2^n$. 以下从略.

关于凸函数，还有一个有用的不等式：

设 $f(x)$ 为区间上的凸函数，则对定义域中任三点 $x>y>z$，均有

$$\sum f(x)+3f(\frac{x+y+z}{3}) \geqslant 2\sum f(\frac{x+y}{2}) \qquad (13)$$

证明　在 $2y>x+z$ 时，只需证

$$3f(\frac{x+y+z}{3})+f(z) \geqslant 2f(\frac{x+z}{2})+2f(\frac{y+z}{2}) \qquad (14)$$

由式(11)

$$f(\frac{x+y+z}{3})-f(\frac{x+z}{2}) \geqslant$$

$$\frac{\frac{x+y+z}{3}-\frac{x+z}{2}}{\frac{y+z}{2}-z}[f(\frac{y+z}{2})-f(z)]=$$

$$\frac{2y-(x+z)}{3(y-z)}[f(\frac{y+z}{2})-f(z)] \qquad (15)$$

由式(10)

$$f(\frac{x+y+z}{3})-f(\frac{y+z}{2}) \geqslant$$

$$\frac{\frac{x+y+z}{3}-\frac{y+z}{2}}{\frac{y+z}{2}-z}[f(\frac{y+z}{2})-f(z)]=$$

$$\frac{2x-(y+z)}{3(y-z)}[f(\frac{y+z}{2})-f(z)] \qquad (16)$$

$2\times$式(15)+式(16)得

$$3f(\frac{x+y+z}{3})-2f(\frac{x+z}{2})-f(\frac{y+z}{2}) \geqslant$$

$$\frac{2[2y-(x+z)]+2x-(y+z)}{3(y-z)}[f(\frac{y+z}{2})-f(z)]=$$

$$f(\frac{y+z}{2})-f(z)$$

即式(13)成立.

$2y \leqslant x+z$ 的情况证明类似.

例 4　对于正实数 a,b,c，证明

$$a+b+c+3\sqrt[3]{abc} \geqslant 2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$$

证明　设$f(x)=e^x$，并取 $x=\ln a$，$y=\ln b$，$z=\ln c$.

例 5　证明 $|x|+|y|+|z|+|x+y+z| \geqslant |y+z|+|z+x|+|x+y|$.

证明　对于实数，由 $|x|$ 的凸性得到上式. 根据 Levi 定理，上式对于复数也成立.

本文是在单墫先生指导下完成的，谨表示衷心的感谢.

参考文献

[1] G·H·哈代,等.不等式[M].越民义,译.北京:科学出版社,1965.
[2] JENSEN J L W V. Sur les fonctions convexs et les inegalites entre les valeurs Moyennes[J]. Acta Math,1906(30):175-193.
[3] 史蒂夫·奥尔森基.美国奥数生[M].金马,译.北京:中国商务出版社,2005.

几个代数不等式猜想

孙文彩

(深圳市平冈中学,广东　深圳　518116)

摘　要:本文提出几个重要的代数不等式猜想.

关键词:代数不等式　猜想

猜想1　已知$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*, a \in \mathbf{R}^+, a \geqslant \frac{1}{2}$.则有

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i})^2(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+x_i}) \leqslant \frac{n^2}{1+na}(n \in \mathbf{N}^*) \qquad (1)$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等号成立.

猜想2　已知$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0, a \in \mathbf{R}^+, a \geqslant \frac{1}{2}, m > 0, \lambda > 0$则有

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i})^{\lambda}(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+b\cdot\sqrt[m]{x_i^{\lambda}}}) \leqslant \frac{n^2}{b+a\cdot\sqrt[m]{n^{\lambda}}}(n \in \mathbf{N}^*) \qquad (2)$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等号成立.

猜想3　已知$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0, m > 0, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$则有

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i^{\lambda}})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+b\cdot\sqrt[m]{c+d\cdot x_i^{\lambda}}}) \leqslant \frac{n^2}{a\cdot\sqrt[m]{n^{\lambda}}+b\cdot\sqrt[m]{cn^{\lambda}+d}} \qquad (3)$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等号成立.

注:式(3)是一个内涵丰富的不等式猜测,是否对满足$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, x_i > 0, \lambda > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), m > 0, a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$的都成立?我们无法考证,下面提出的猜想4,5,6均是式(3)的特例.

猜想4　已知$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0$,则有

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda x_i}}) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}} \qquad (4)$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等号成立.

注:① 特例$\lambda = 2$发表在《美国数学月刊》上.
② $\lambda = 3$发表在《中学数学教学》上.

猜想5　已知$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*$,实数$a, b$满足$a + bx_i > 0\ (i = 1,2,3,\cdots n), a > 0, na > n|b| - b, m > 0, \lambda > 0$,则有

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i^{\lambda}})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[m]{a+bx_i^{\lambda}}} \leqslant \frac{n^2}{\sqrt[m]{na^{\lambda}+b}}(n \in \mathbf{N}^*) \qquad (5)$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等号成立.

猜想6　已知$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i > 0(i = 1,2,3,\cdots,n), n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*, m > 0, a > 0, b > 0$,则有

$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt[m]{x_i^{\lambda}})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a+b\sqrt[m]{x_i^{\lambda}}}) \leqslant \frac{n^2}{a\sqrt[m]{n^{\lambda}}+b}\ (n \in \mathbf{N}^*) \qquad (6)$$

当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等号成立.

参考文献

[1] 邢进喜. 数学问题1388[J]. 数学通报, 2002(9).

[2] 吴善和, 石焕南. 一个无理不等式的简证及类似[J]. 福建中学数学, 2004(2).

[3] 舒金根. 一个无理不等式的推广及其他[J]. 不等式研究通讯,2004,11(1).
[4] 孙文彩. 一个代数不等式的加权推广与证明[J]. 中学数学研究,2006(6).
[5] 孙文彩. 不等式问题 CIQ124[J]. 中国不等式研究通讯,2006(3).
[6] 孙文彩. 有奖擂题(80)[J]. 中学数学教学,2006(4).

一个不等式问题的解答

李　超　林　博

（中国人民大学附属中学，北京　100190）

杨学枝老师于2007年8月5日在"高中数学奥林匹克协作体学校第七届夏令营"（深圳）为我们上课时曾提出以下问题：

已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$是非负实数，且$\max\limits_{1\leq i\leq n}\{a_i\}=a_1$，$\min\limits_{1\leq i\leq n}\{a_i\}=a_n$. 证明：

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2\leqslant[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}](a_1-a_n)^2$$

今给出如下证明. 首先证明以下两个引理：

引理1　如果$x_1,x_2,\cdots,x_k$为非负实数，那么$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2\geqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2$总成立（易证，略）.

引理2　已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$是非负实数，且$\max\limits_{1\leq i\leq n}\{a_i\}=a_1$，$\min\limits_{1\leq i\leq n}\{a_i\}=a_n$，则对于$t=1,2,\cdots,n-1$，如下不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n-t}(a_i-a_{i+t})^2\leqslant\min\{t,n-t\}\cdot(a_1-a_n)^2$$

证明　(1) 如果$t\leqslant[\frac{n}{2}]$，则$t\leqslant n-t$. 将所有形如$(a_i-a_{i+t})^2$的式子按i模t的余数分为如下t类：$A_r=\{(a_i-a_{i+t})^2\mid i\equiv r\pmod t,1\leqslant i\leqslant n-t\}$（其中$r=1,2,\cdots,t$，并且规定每个$A_r$为可重集）.

对于每个A_r，有

$$\sum_{x\in A_r}x=(a_r-a_{r+t})^2+(a_{r+t}-a_{r+2t})^2+\cdots+(a_{r+(k-1)t}-a_{r+kt})^2\text{（由引理1）}\leqslant$$
$$[(a_r-a_{r+t})+(a_{r+t}-a_{r+2t})+\cdots+(a_{r+(k-1)t}-a_{r+kt})]^2=$$
$$(a_r-a_{r+kt})^2\leqslant(a_1-a_n)^2$$

其中k为使$r+kt\leqslant n$的最大整数.

(2) 如果$t>[\frac{n}{2}]$，则$t>n-t$. 对$i=1,2,\cdots,n-t$，$(a_i-a_{i+t})^2\leqslant(a_1-a_n)^2$，有

$$\sum_{i=1}^{n-t}(a_i-a_{i+t})^2\leqslant(n-t)(a_1-a_n)^2$$

引理2得证.

下面证明杨学枝老师提出的问题. 我们将对n的奇偶性分类讨论：

(1) 当$n=2k(k\in\mathbf{Z})$时，则

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=$$
$$\sum_{t=1}^{2k-1}[\sum_{i=1}^{2k-t}(a_i-a_{i+t})^2]\leqslant$$
$$\sum_{t=1}^{2k-1}(\min\{t,2k-t\}\cdot(a_1-a_n)^2)\text{（由引理2）}=$$
$$[1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+2+1]\cdot(a_1-a_n)^2=$$
$$k^2\cdot(a_1-a_n)^2=\frac{n^2}{4}\cdot(a_1-a_n)^2=$$
$$[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}](a_1-a_n)^2$$

(2) 当$n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$时，则

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=$$
$$\sum_{t=1}^{2k}[\sum_{i=1}^{2k+1-t}(a_i-a_{i+t})^2]\leqslant$$
$$\sum_{t=1}^{2k}(\min\{t,2k+1-t\}\cdot(a_1-a_n)^2)\text{（由引理2）}=$$
$$[1+2+\cdots+(k-1)+k+k+(k-1)+\cdots+2+1]\cdot(a_1-a_n)^2=$$
$$k(k+1)\cdot(a_1-a_n)^2=$$
$$\frac{n^2-1}{4}\cdot(a_1-a_n)^2=$$
$$[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}](a_1-a_n)^2$$

综合以上两方面，问题得证.

问题中的系数$[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}]$是最佳的.

这是由于，取$a_1=a_2=\cdots=a_{[\frac{n}{2}]}=1$，$a_{[\frac{n}{2}]+1}=\cdots=a_n=0$，不难验证等号成立. 于是题目中的系数$[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}]$是最佳的.

作者简介

李超，北京市中国人民大学附属中学(高中)2009届14班学生。对数学有浓厚兴趣，并获2006～2008年全国高中数学联赛一等奖、2009年CMO满分金牌和2007年俄罗斯数学奥林匹克金牌(九年级组)。

林博，北京市中国人民大学附属中学(高中)2009届14班学生。对数学有浓厚兴趣，从小学起参加各级数学竞赛，曾获得2008年和2009年中国数学奥林匹克金牌及2007年俄罗斯数学奥林匹克金牌(九年级组)。

两位作者均已被保送至北京大学数学系。